



## حل عددی مسائل ترموالاستیسیته در ماده تابعی

علی شقاقی مقدم - استادیار گروه طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد واحد تاکستان  
سمیرا کرمی - دانشجوی کارشناسی ارشد طراحی کاربردی - دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد واحد تاکستان

E-mail: [Shaghaghi@ioec.com](mailto:Shaghaghi@ioec.com)

چکیده: در این مقاله هدف بررسی رفتار ماده تابعی تحت بارگذاری حرارتی - مکانیکی می باشد. برای این منظور از نرم افزار عددی آباکوس استفاده شده است. بدلیل اینکه این نرم افزار مستیما توانایی حل ماده تابعی را ندارد، فرمول بندی های مربوط به حرارتی و مکانیکی ماده تابعی در کدهای Umat و Umatht نوشته شده و به نرم افزار آباکوس وصل شده اند. در این تحقیق اثرات گرادیان خواص مکانیکی از جمله مدول ارتجاعی، نسبت پواسون و ضریب انبساط حرارتی و همچنین گرادیان خواص حرارتی از جمله ضریب انتقال حرارتی در رفتار تنش ماده تابعی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور صحت سنجی نتایج، مقایسه ای بین نتایج بدست آمده از این تحقیق و نتایج تحلیلی و عددی موجود در مراجع انجام پذیرفته است. به عنوان مساله نمونه، مساله ورق تحت بارگذاری حرارتی بدقت مورد تحلیل قرار گرفته و اثرات گرادیان خواص مکانیکی و حرارتی در نظر گرفته شده است

واژه های کلیدی: ماده تابعی لایه ای، نیکل-مس، زینترینگ بدون فشار، تخلخل، سختی.

## Numerical Solution of Thermo-elasticity problems in functionally graded materials

A. Shaghaghi Moghaddam, Ass. Prof., the Faculty of Mech. Eng., TIAU

S. Karami, M.S. Student, Dept. of Applied Desgin, the Faculty of Mech. Eng., TIAU

**Abstract:** The aim of this paper is the study of the behavior of functionally graded material (FGM), under thermal-mechanical loading. For that we use the ABAQUS software. Because the software cannot directly solve the FGM, the formulation of thermomechanical behavior FGM have done in Umatht and Umat routines and linked them to ABAQUS. In this study, the effects of the mechanical properties, such as; the modulus of elasticity, Possion ratio and the thermal elongation have been studied. Also the thermal properties of FGM, such as; heat transfer coefficient have been studied. For the validation of results, the obtained results are compared with the results from some numerical and experimental works in literature have been done. As a case study, the problem of a plate under thermal loading has been analysed in which the gradient of thermal and mechanical properties have been considered.

**Keywords:** Functionally graded material, ABAQUS, Numerical solution, Thermo-elasticity

۱- مقدمه

مواد تابعی یک نوع از مواد ترکیبی با ویژگی تغییر تدریجی از سطحی به سطح دیگر می باشند این مواد توسط محققین ژاپنی در سال ۱۹۸۴ برای طرح ریزی مواد عایق حرارتی پیشنهاد شدند [۱]. مواد تابعی به دلیل داشتن مزیت های مختلف از جمله توزیع بهتر تنش های باقیمانده، خواص حرارتی بهبود یافته و چقرمگی بهتر، کاربردهای مختلفی را در صنایع پیدا کرده اند [۱]. همگام با افزایش کاربردهای صنعتی مواد تابعی بررسی رفتار این مواد تحت شرایط مختلف حائز اهمیت می باشد. در این میان می توان به بررسی رفتار شکست ماده تابعی، توزیع تنش باقیمانده، بررسی رفتار ماده تابعی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی اشاره نمود. در این راستا روش های تجربی، تحلیلی و عددی توسط محققان استفاده می گردد.

Gu و Asaro [۲]. با استفاده از زیرروال Umat در آباکوس، مواد تابعی دوبعدی را تحت بارگذاری مکانیکی مدل سازی کردند. Walters و همکاران [۳] با استفاده از روش انتگرال تعامل، ضریب شدت تنش در مود اول در ماده تابعی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی محاسبه نمودند. آنها از نرم افزار Warp3D برای مدل سازی ماده تابعی استفاده نمودند. Alavi و همکاران [۴] رفتار ترمو الاستیک یک کره تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی را بررسی کردند. آنها فرض نمودند که خواص مکانیکی و حرارتی تابعی از موقعیت در راستای شعاع کره می باشد. Kursuna [۵] و همکاران تنش های الاستیک یک دیسک متشکل از مواد تابعی که تحت فشار یکنواخت قرار گرفته را بررسی کردند. آنها فرض نمودند که مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی به صورت یک تابع نمایی تغییر کرده و نسبت پواسون را ثابت در نظر گرفتند. Kim و Amit [۶] توسط روش المان محدود ضرایب شدت تنش را در ماده تابعی تحت بارگذاری حرارتی را بررسی کردند.

Reddy [۷] به بیان فرمول های تئوری و روش های اجزا محدود و پاسخ های گذرا تحت بارگذاری ترمومکانیکال در مواد تابعی پرداخته است. Lutz و Zimmerman [۸] مسئله حرارتی در ماده تابعی را که مدول الاستیک و ضریب انبساط حرارتی به صورت خطی تغییر می کنند را بررسی کرده اند. Eslami و همکاران [۹] به روش تحلیلی به حل معادلات حاکم بر مواد تابعی و به بررسی دما و تغییر مکان پرداخته اند. Durodola و Adlington [۱۰] به کاربرد روش های عددی و شکل های مختلفی از گرادیان خواص مواد اشاره کرده اند. شقاقی و قاجار نحوه مدل سازی عددی ماده تابعی را تحت بارگذاری مکانیکی توسط زیرروال UEL را بررسی نمودند. برای بررسی رفتار ماده تابعی، معمولاً برای ساده سازی روابط از اثرات گرادیان نسبت پواسون صرف نظر می گردد. Shaghghi و همکاران [۱۱-۱۲]. نشان دادند که اثرات گرادیان نسبت پواسون در بعضی شرایط غیر قابل صرف نظر کردن می باشد. آنها ضرایب شدت تنش را با در نظر گرفتن گرادیان خواص مکانیکی محاسبه نمودند و نشان دادند که اثرات گرادیان نسبت پواسون بایستی در محاسبات لحاظ گردد.

با توجه به پیشینه کارهایی که بیان گردید، نیاز به بررسی رفتار ماده تابعی تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی لازم می باشد. برای این منظور در این تحقیق سعی شده است که توسط نرم افزار عددی آباکوس ماده تابعی بررسی شود. با توجه به اینکه این نرم افزار بطور مستقیم نمی تواند ماده تابعی را مدل سازی نماید بایستی از زیرروال هایی استفاده گردد تا گرادیان خواص حرارتی و مکانیکی لحاظ گردد. برای حل ماده تابعی تحت بارگذاری حرارتی- مکانیکی در ابتدا بایستی حل حرارتی انجام گیرد تا توزیع دما در قطعه محاسبه شود. برای این منظور فرمول بندی انتقال حرارت مربوط به ماده تابعی در زیرروال Umatht نوشته شده است. با در نظر گرفتن گرادیان خواص

بطوری که  $Q$  منبع ایجاد حرارت و  $T$  دما می باشد. اپراتور  $\nabla$  گرادیان را نشان می دهد. در رابطه فوق  $q$  بردار شار حرارتی می باشد که از رابطه فوریه محاسبه می گردد:

$$q = -k(x)\nabla T, q = -k(x)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}\right) \quad (2)$$

در رابطه فوق،  $k(x)$  ضریب انتقال حرارتی بوده که برای ماده تابعی تابعی از مختصات می باشد. لازم به ذکر می باشد که در حالت کلی خواص مکانیکی و خواص حرارتی مواد، تابعی از دما نیز می باشد. بدلیل اینکه محدوده دمایی در نظر گرفته شده در این تحقیق کم می باشد، فرض شده است که خواص مکانیکی و حرارتی مستقل از دما باشند. بنابراین برای ماده تابعی رابطه فوریه بصورت زیر بیان می گردد:

$$\nabla \cdot q = \nabla \cdot (-k(x)\nabla T) \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left(-k(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-k(x)\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-k(x)\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (3)$$

شرایط مرزی بارگذاری حرارتی بصورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} \theta = \hat{\theta} & \text{on } \Gamma_{\theta} \\ -q \cdot n = \hat{q} & \text{on } \Gamma_q \end{cases} \quad (4)$$

## ۲-۲- ترموالاستیسیته در ماده تابعی

جابجایی ترموالاستیک در یک ماده تابعی ایزوتروپیک در حالت شبه استاتیک با استفاده از رابطه تعادلی زیر بیان می گردد:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho b = 0 \quad (5)$$

بطوری که  $\sigma$  تانسور تنش و  $b$  نیروی حجمی می باشند. تانسور

حرارتی می توانیم توزیع دما را برای ماده تابعی بدست آوریم. پس از محاسبه توزیع دما، حال بایستی حل استاتیکی صورت پذیرد تا توزیع تنش محاسبه گردد. برای این منظور توزیع دما که از حل حرارتی بدست آمده بود به عنوان ورودی به مساله اعمال می گردد. سپس فرمولبندی مربوط به رفتار ماده تابعی در زیرروال Umat نوشته شده و به آباکوس لینک می گردد. توسط این زیرروال گرادیان خواص مکانیکی از جمله مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون لحاظ می گردند. در این تحقیق اثرات گرادیان خواص مکانیکی و حرارتی بصورت کامل مورد بررسی قرار گرفته است. برای حالت خاصی که نسبت پواسون ثابت باشد نتایج محاسبات با نتایج موجود در مقالات مقایسه شده است. سپس بعد از صحنه سنجی نتایج، بطور خلاصه اثرات گرادیان خواص مکانیکی و حرارتی بررسی شده است. از نتایج محاسبات ملاحظه می گردد که اثرات گرادیان خواص حرارتی در توزیع دما و همچنین اثرات گرادیان خواص مکانیکی در توزیع تنش بسیار قابل توجه می باشد.

در ادامه در ابتدا فرمول بندی مساله انتقال حرارت در ماده تابعی بررسی می شود. سپس روابط ترمو-الاستیسیته در ماده تابعی بیان می گردد. الگوریتم حل عددی ماده تابعی توسط آباکوس مورد ارزیابی قرار می گردد. سپس یک مساله ورق تحت بارگذاری حرارتی با در نظر گرفتن گرادیان خواص مکانیکی و حرارتی مورد بررسی قرار می گیرد.

## ۲- تئوری و فرمول بندی

### ۲-۱- انتقال حرارت پایدار در ماده تابعی

توزیع دما در ماده تابعی ایزوتروپیک از حل رابطه تعادل حرارتی زیر بدست می آید:

$$-\nabla \cdot q + Q = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

تنش با در نظر گرفتن بار حرارتی بصورت زیر بیان می گردد:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^m - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \\ \varepsilon_{ij}^{th} &= \alpha(\mathbf{x}) \Delta T \delta_{ij} \end{aligned} \quad (11)$$

تقریب المان محدود معاله حرارتی و مکانیکی زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \mathbf{u} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{K}_\theta \mathbf{T} &= \mathbf{f}^{th} \end{aligned} \quad (12)$$

که در رابطه فوق  $\mathbf{K}$  و  $\mathbf{K}_\theta$  تانسور سفتی المان برای بارگذاری مکانیکی و حرارتی می باشند:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\mathbf{X}) \mathbf{B} dV \\ \mathbf{K}_\theta &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{I} \mathbf{B} dV \end{aligned} \quad (13)$$

### ۳-۱ حل عددی مساله ترموالاستیسیته

برای حل مساله ترموالاستیسیته در ماده تابعی از حل غیر جفت شده (Uncoupled) استفاده شده است. به این صورت که در ابتدا با در نظر گرفتن بار حرارتی و گرادیان خواص حرارتی حل انتقال حرارت صورت می گیرد. کانتور دما در جسم از حل انتقال حرارت بدست می آید که برای ماده تابعی علاوه بر هندسه و نوع بارگذاری، تابعی از گرادیان ضریب انتقال حرارتی می باشد. سپس حل الاستیک برای مساله مورد نظر انجام می گیرد به این صورت که کانتور دما به عنوان شرایط اولیه به قطعه وارد می گردد. سپس با لحاظ کردن گرادیان خواص مکانیکی از جمله مدول الاستیسیته، نسبت پواسون و ضریب انبساط حرارتی، توزیع تنش در جسم بدست می آید.

در این تحقیق برای حل عددی مساله ترموالاستیسیته در ماده تابعی از نرم افزار آباکوس استفاده شده است. نرم افزار آباکوس بصورت مستقیم توانایی در نظر گرفتن گرادیان خواص

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \lambda(\mathbf{x}) \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon} - \beta(\mathbf{x}) \Delta T \mathbf{I} \\ \beta(\mathbf{x}) &= \alpha(\mathbf{x}) (3\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (6)$$

برای حالت الاستیک خطی در ماده تابعی رابطه بین تنش کرنش بصورت زیر بیان می گردد:

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \lambda(\mathbf{X}) + 2\mu(\mathbf{X}) & \lambda(\mathbf{X}) & \lambda(\mathbf{X}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\mathbf{X}) & \lambda(\mathbf{X}) + 2\mu(\mathbf{X}) & \lambda(\mathbf{X}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\mathbf{X}) & \lambda(\mathbf{X}) & \lambda(\mathbf{X}) + 2\mu(\mathbf{X}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu(\mathbf{X}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu(\mathbf{X}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

در روابط فوق  $\lambda(\mathbf{x})$  و  $\mu(\mathbf{x})$  ضرایب لامه،  $\alpha(\mathbf{x})$  ضریب انبساط حرارتی و  $\varepsilon$  کرنش کل در جسم می باشند:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}) &= \frac{E(\mathbf{x}) \nu(\mathbf{x})}{(1 + \nu(\mathbf{x}))(1 - 2\nu(\mathbf{x}))} \\ \mu(\mathbf{x}) &= \frac{E(\mathbf{x})}{2(1 + \nu(\mathbf{x}))} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^T &= \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{xy} \} \end{aligned} \quad (8)$$

با فرض تغییر شکل های کوچک، تانسور کرنش کلی از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (9)$$

بطوری که  $\mathbf{L}$  ماتریس اپراتور خطی می باشد که شامل مشتقات اول نسبت به مختصات می باشد:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

رابطه بین کرنش حرارتی، مکانیکی و کرنش کل بصورت زیر بیان می گردد:

ابتدا برای بررسی دقت کار انجام شده، مقایسه ای بین کار حاضر و نتایج ارائه شده در [۳] انجام شده است. سپس به بررسی اثرات گرادیان خواص مکانیکی و حرارتی پرداخته شده است. در این مساله یک قطعه مستطیلی با ابعاد  $1 \times 4 \times 0.1$  مطابق شکل (۲) که تحت بارگذاری حرارتی قرار است مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

جسم در ابتدا در دمای  $100^\circ \text{C}$  بوده سپس دیواره‌های آن تحت دمای  $T_1$  و  $T_2$  قرار می‌گیرند به طوری که  $T_1 = 5$  و  $T_2 = 50$ . در این مساله در نظر گرفته شده است که خواص مکانیکی و حرارتی به صورت نمایی تغییر نمایند.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= E_1 e^{\beta x}, \beta = \frac{1}{W} \ln \left( \frac{E_2}{E_1} \right) \\ \alpha(\mathbf{x}) &= \alpha_1 e^{\omega x}, \omega = \frac{1}{W} \ln \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\ k(\mathbf{x}) &= k_1 e^{\eta x}, \eta = \frac{1}{W} \ln \left( \frac{k_2}{k_1} \right) \\ \nu(\mathbf{x}) &= \nu_1 e^{\lambda x}, \lambda = \frac{1}{W} \ln \left( \frac{\nu_2}{\nu_1} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

به طوریکه  $E(\mathbf{x})$  مدول الاستیسیته،  $\alpha(\mathbf{x})$  ضریب انبساط حرارت،  $\nu(\mathbf{x})$  نسبت پواسون و  $k(\mathbf{x})$  ضریب انتقال حرارتی و  $\beta, \omega, \eta, \lambda$  شاخص گرادیان می‌باشند. توزیع دما در قطعه مورد نظر از حل رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (15)$$

با حل رابطه فوق توزیع دما در قطعه مورد نظر بدست می

آید:

مکانیکی و حرارتی را نداشته و بایستی از زیر روال های مربوطه برای اعمال گرادیان استفاده شود. برای این منظور از زیر روال `Umatht` برای حل مساله حرارتی با در نظر گرفتن گرادیان خواص حرارتی استفاده شده است. و برای حل الاستیسیته با در نظر گرفتن گرادیان خواص مکانیکی از زیر روال `Umat` استفاده شده است. فلوجارت حل مساله در شکل (۱) نشان داده شده است.

بعد از مدل نمودن قطعه و حل حرارتی آن، برای اعمال گرادیان خواص حرارتی و لینک نمودن آن با فایل فرترن که شامل زیرروال `Umatht` می باشد بایستی در فایل `inp` تغییراتی اعمال گردد. به همین منظور در فایل `inp` با حذف `*user` و جایگزینی آن با `material,type=thermal` می توان برای گرادیان های مختلفی از ضریب انتقال حرارتی، توزیع دما را در ماده تابعی بدست آورد. حال با اجرای مسئله استاتیکی و با اعمال توزیع دما ناشی از حل حرارتی به عنوان ورودی مسئله، بایستی در فایل `inp` آن نیز جهت اعمال گرادیان خواص مکانیکی و لینک نمودن آن با فایل فرترن که شامل زیرروال `Umat` می باشد نیز تغییراتی صورت پذیرد. به همین منظور در فایل `inp` با حذف خواص مواد همگن و جایگزینی آن با `*user` `material,type=mechanical` پس از اجرای آن در آباکوس می توان برای گرادیان های مختلفی از مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی، توزیع تنش را در ماده تابعی بدست آورد.

#### ۴- مطالعه موردی - حل مسئله ورق

در این بخش از روش اجزا محدود برای بررسی یک ماده تابعی تحت بارهای ترکیبی مکانیکی و حرارتی استفاده می کنیم.

حال با در نظر گرفتن توزیع دمای بدست آمده از حل مساله حرارتی با در نظر گرفتن  $K_2/K_1=10$ ، می خواهیم اثرات گرادیان خواص مکانیکی را در توزیع تنش محاسبه نماییم. در شکل (۶) اثرات گرادیان مدول الاستیسیته در توزیع تنش نرمال نشان داده شده است. برای این منظور  $\alpha_2/\alpha_1=2$  و  $\nu_2/\nu_1=0.3$  در نظر گرفته شده اند. همانطور که از شکل ملاحظه می گردد تغییر توزیع تنش برای حالتی شیب گرادیان های بیشتر مدول الاستیسیته بیشتر می باشد. هر چقدر شیب گرادیان کمتر باشد توزیع تنش یکنواخت تر می باشد.

در شکل (۷) اثرات گرادیان نسبت پواسون در توزیع تنش نرمال نشان داده شده است. برای محاسبه تنش نرمال از  $\sigma_{yy} / \sigma_0, \sigma_0 = E_1 \alpha_1 T_0 / (1 - \nu_1)$  استفاده شده است. همانطور که ملاحظه می گردد اثرات گرادیان نسبت پواسون قابل توجه می باشد. با افزایش شیب گرادیان نسبت پواسون، توزیع تنش نرمال شده نیز دارای تغییرات بیشتر در ورق می باشد. از این نمودار می توان این استنباط را داشت که برای مدل سازی دقیقتر ماده تابعی بایستی گرادیان نسبت پواسون را در نظر گرفت.

برای نشان دادن اثرات گرادیان ضریب انبساط حرارتی، مساله حرارتی با گرادیان  $K_2/K_1=10$  حل شده است. گرادیان مدول الاستیسیته  $E_2/E_1=10$  و نسبت پواسون برابر 0.3 در نظر گرفته شده است. حال برای گرادیان های مختلف ضریب انبساط حرارتی توزیع تنش نرمال در جسم بدست آمده است. نتایج در شکل (۸) نشان داده شده است. همانطور که از شکل ملاحظه می گردد گرادیان ضریب انبساط حرارتی در توزیع تنش نرمال اثرات زیادی را دارد. به این صورت که با افزایش نسبت گرادیان ضریب انبساط حرارتی توزیع تنش نیز دارای شیب بیشتر می باشد.

$$T(x) = ce^{-\eta x} + D \quad (16)$$

$$T(W) = T_2, T(0) = T_1$$

توزیع تنش در جهت  $y$  روی محور  $X$  به صورت زیر محاسبه می گردد [۳]:

$$\sigma_{yy} = \frac{E(x)}{(1-\nu^2)} [Ax + B - (1+\nu)\alpha(x)(T(x) - T_0)] \quad (17)$$

برای صحه سنجی نتایج حالت خاص گرادیان که توسط Walters و همکاران [۳] در نظر گرفته شده بود مورد بررسی قرار می گیرد. برای گرادیان  $E_2/E_1=10, K_2/K_1=10, \alpha_2/\alpha_1=2$  و مدول نسبت پواسون  $\nu=0.3$  تنش نرمال شده عمودی روی محور  $X$  و همچنین کانتور دما در شکل های زیر نشان داده شده است. تنش عمودی محاسبه شده روی محور  $X$  بصورت  $\sigma_{yy} / \sigma_0, \sigma_0 = E_1 \alpha_1 T_0 / (1 - \nu)$  بی بعد می گردد. ملاحظه می شود که نتایج بدست آمده از این تحقیق همپوشانی بسیار خوبی با نتایج [۳] دارد.

بعد از صحه گذاری نتایج بدست آمده از حل عددی حاضر با نتایج موجود در مقالات، حال بطور خاص اثرات گرادیان خواص مکانیکی و حرارتی را بررسی می نماییم. همانطوریکه گفته شد در مراجع بخاطر ساده سازی حل مسائل، از اثرات گرادیان نسبت پواسون صرف نظر شده بود که در این تحقیق اثرات آن نظر گرفته می شود.

در شکل (۵) اثرات گرادیان ضریب انتقال حرارتی روی کانتور دما در جسم نشان داده شده است. به همین منظور نسبت ضریب انتقال حرارتی بصورت  $K_2/K_1=10, 5, 1, 0.2, 0.1$  در نظر گرفته شده است. ملاحظه می گردد که هم مقدار و هم نوع تغییر کانتور دما در جسم متأثر از گرادیان ضریب انتقال حرارتی می باشد.

- [1] Birman, V., Byrd, L., 2007, " Modeling and analysis of functionally graded materials and structures", *Applied Mechanics Reviews*, 60, pp. 195-216.
- [2] Gu, P., Dao, M., Asaro, R. J., 1999, "A Simplified method for calculating the crack-tip field of functionally graded materials using the domain integral", *ASME journal of Applied Mechanics*, 66, pp. 101-108.
- [3] Walters, M.C., Paulino, G.H., Dodds, R.H. Jr, 2004, " Stress intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading", *International Journal of Solids and Structures*, 41, pp. 1081-1118.
- [4] Alavi, F., Karimi, D., Bagri, A., 2008, "An investigation on thermoelastic behavior of functionally graded thick spherical vessels under combined thermal and mechanical loads", *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 31.
- [5] Kursuna, A., Topcu, M., Tetik, T., 2011, "Stress Analysis of Functionally Graded Disc under Thermal and Mechanical Loads", *Procedia Engineering*, 10, pp. 2949-2954.
- [6] KC, A., Kim, J., 2008, "Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials", *Engineering Fracture Mechanics*, 75, pp. 2542-2565
- [7] Reddy, J.N., 1994, Thermomechanical Behavior of Functionally Graded Materials", *Proposal, CML Report*
- [8] Lutz, M.P, Zimmeman, R.W., 1996, "Thermal stresses and effective thermal expansion coefficient of functionally graded sphere", *Journal of Thermal Stresses*, 19, pp. 39-54.

## ۶- نتیجه گیری

در این تحقیق رفتار ترمو-الاستیک ماده تابعی به روش المان محدود با در نظر گرفتن گرادیان خواص مکانیکی و گرادیان خواص حرارتی بررسی گردید. به همین از نرم افزار آباکوس به همراه زیرروال های Umat و Umatht استفاده شد. در ابتدا با در نظر گرفتن گرادیان خواص حرارتی حل حرارتی انجام گرفته و با استفاده از توزیع دمای بدست آمده، حل ترموالاستیسیته با در نظر گرفتن گرادیان خواص مکانیکی انجام پذیرفت. برای حالت خاص و با در نظر گرفتن نسبت پواسون ثابت، نتایج بدست آمده از این تحقیق برای توزیع دما و تنش نرمال شده با نتایج موجود در مقالات مقایسه بعمل آمد. ملاحظه گردید که نتایج همپوشانی خوبی با نتایج مرجع دارند. سپس اثرات گرادیان خواص مکانیکی و حرارتی بطور جدا گانه بررسی شدند. ملاحظه شده که گرادیان ضریب انتقال حرارتی روی توزیع دما بسیار قابل توجه می باشد. همچنین گرادیان خواص مکانیکی اثرات قابل توجهی روی توزیع تنش در جسم دارند. در این تحقیق همچنین اثرات گرادیان نسبت پواسون بررسی شد. ملاحظه گردید که اثرات گرادیان نسبت پواسون قابل توجه می باشد.

## ۷- فهرست علائم

گرش حرارتی	$\epsilon^{th}$
گرش مکانیکی	$\epsilon^m$
ضرایب لامه	$\lambda(x)$ $\mu(x)$
مختصات نقطه در فضا	$x$
مرزی که در آن دما تجویز شده	$\Gamma_\theta$
مرزی که در آن شار تجویز شده	$\Gamma_q$

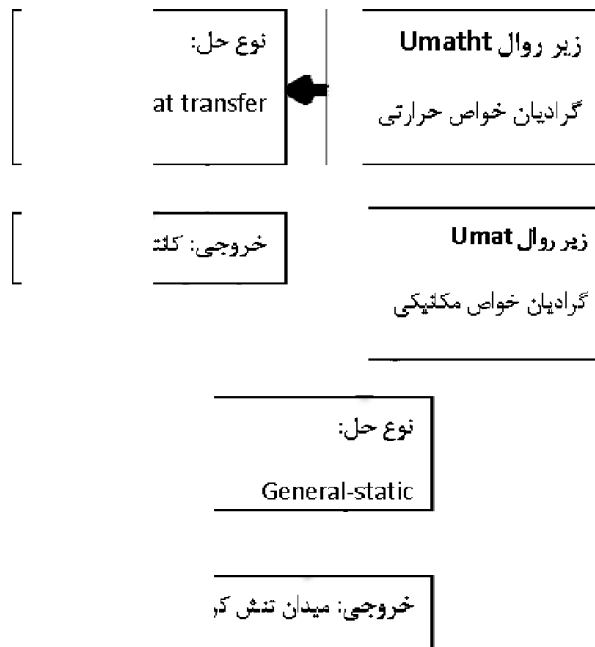
## ۷- مراجع

[12] Shaghghi, A.M., Ghajar, R., Alfano, M, 2012.. " Determining the mixed mode stress intensity factors of surface cracks in functionally graded hollow cylinders". *Materials and Design*, 43, pp. 475–484.

[9] Eslami, M.R., Babaei, M.H., Poultangari, P., 2005, "Thermal and mechanical stresses in functionally graded thick sphere", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 82, pp. 522-527.

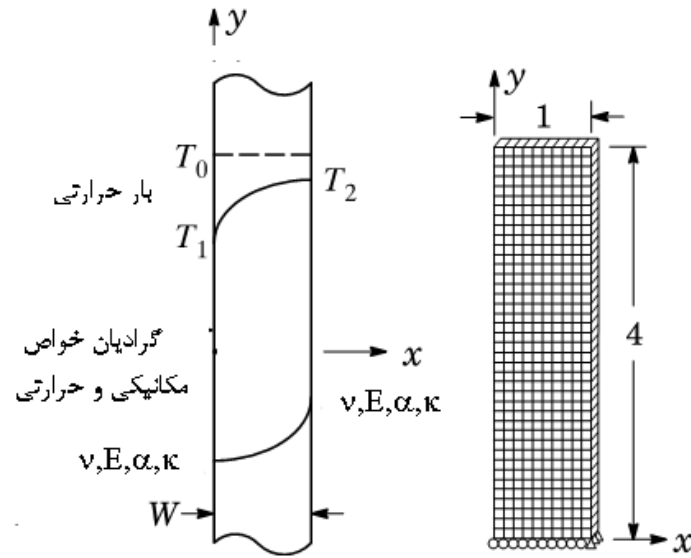
[۱۰] علی شقاقی مقدم، رحمت ا... قاجار ، ۱۳۸۹ " بکارگیری المان های گرادیانی در آبکوس به منظور مدلسازی مواد تابعی سه بعدی"، ISME 2010 دانشگاه شریف

[11] Shaghghi, A.M., Ghajar, R., Alfano, M., 2012. " Finite element evaluation of stress intensity factors in curved non-planar cracks in FGMs". *Mechanics Research Communications*, 38, pp. 17-23

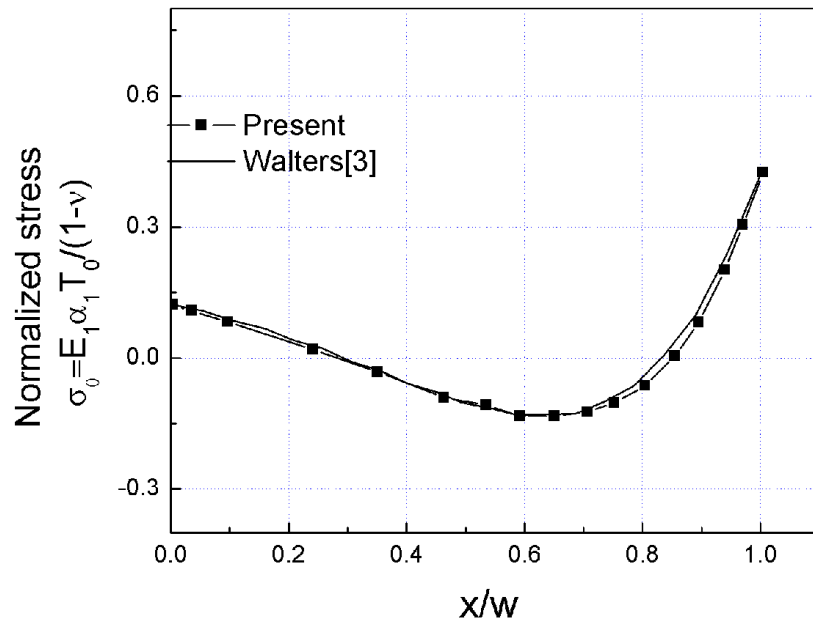


شکل (۱): نمودار حل عددی توسط آباکوس



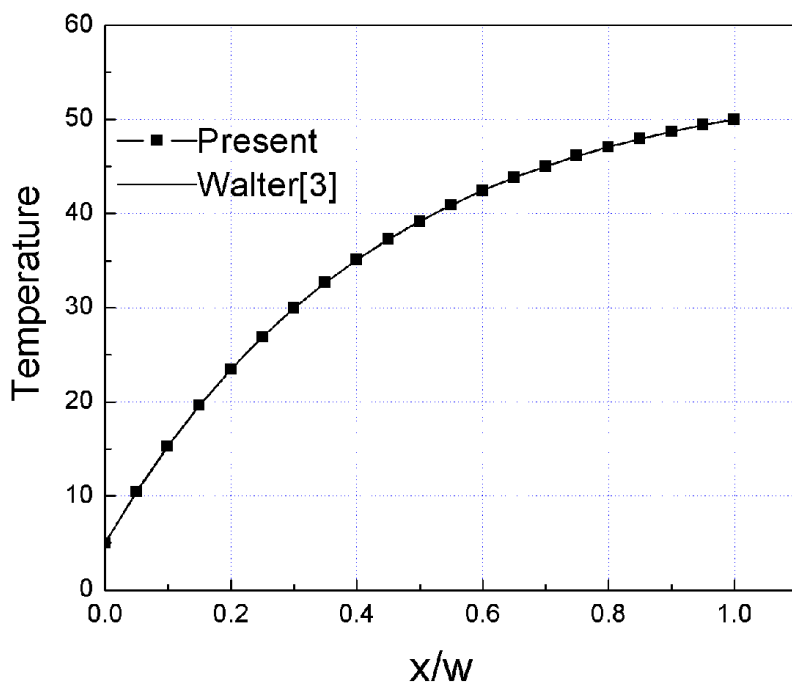


شکل (۲): ورق مستطیلی تحت بارگذاری حرارتی [۳]

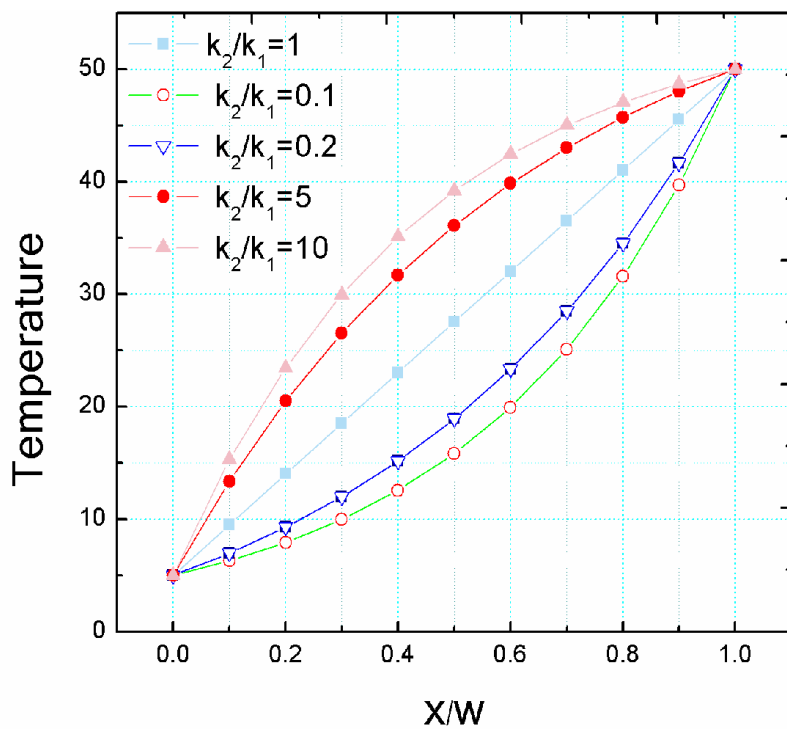


شکل (۳): مقایسه نمودار توزیع تنش نرمال برای حالت

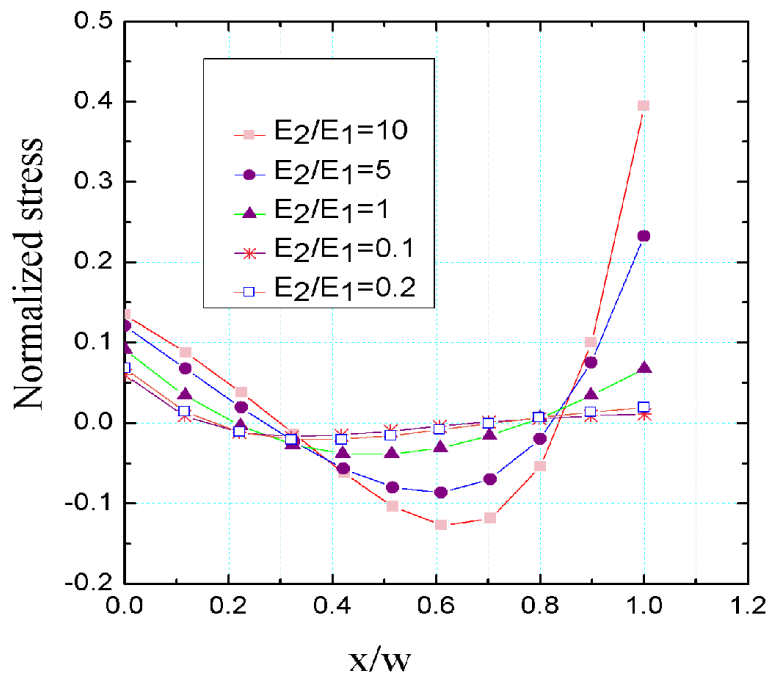
$$E_2/E_1=10, K_2/K_1=10, \alpha_2/\alpha_1=2, 0.3=\nu$$



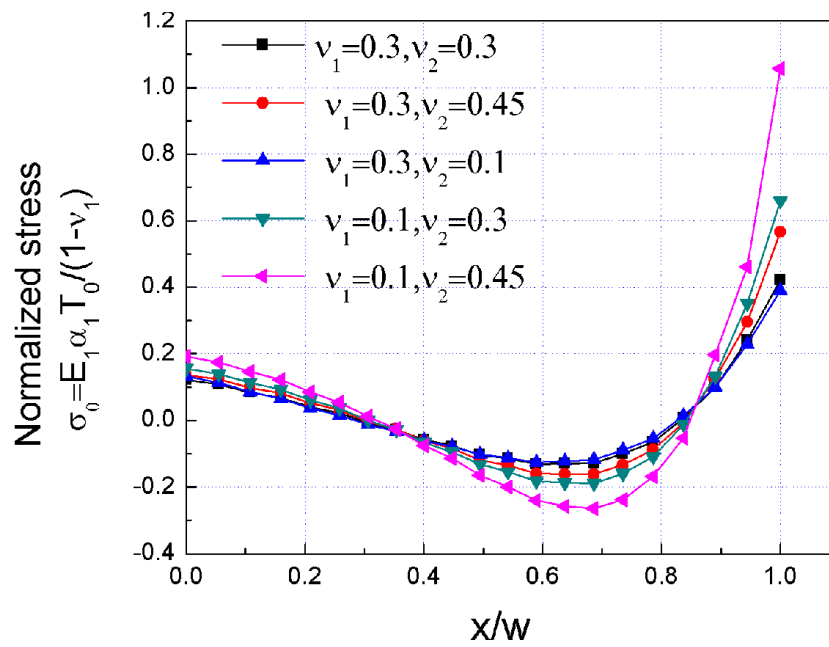
شکل (۴) : مقایسه نمودار توزیع دما برای حالت  $\nu=0.3$  ،  $\alpha_2/\alpha_1=2$  ،  $K_2/K_1=10$  ،  $E_2/E_1=10$



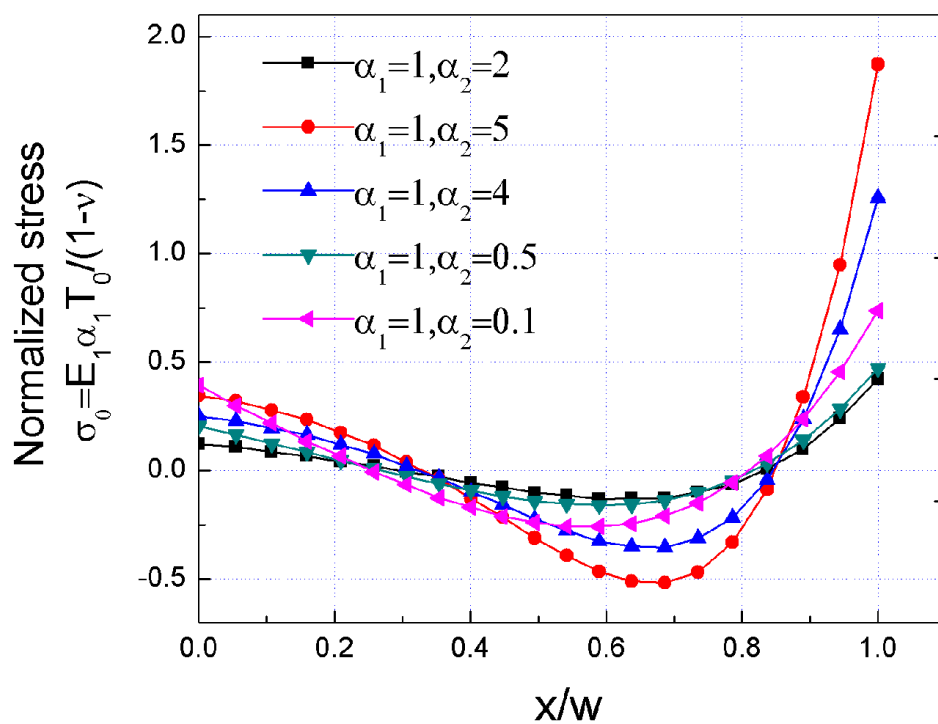
شکل (۵) : نمودار توزیع دما با در نظر گرفتن گرادیان ضریب انتقال حرارتی



شکل (۶): نمودار توزیع تنش با در نظر گرفتن گرادیان مدول الاستیسیته



شکل (۷): نمودار توزیع تنش برای گرادیان های نسبت پواسون



شکل (۸) : نمودار توزیع تنش برای گرادیان های نسبت بواسون