

# حرکت آشوبناک و کنترل آن برای تیریک سرگردار غیرصفحه‌ای، غیرخطی با تحریک پارامتری

جواد مرزبان راد<sup>1</sup>، مرتضی صیدی<sup>2</sup>، حسین صالحی مرزیجرانی<sup>3</sup>  
marzban@iust.ac.ir

## چکیده

در این مقاله، آنالیز حرکت آشوبناک و کنترل آن برای تیریک سرگردار غیر صفحه‌ای، غیرخطی با تحریک پارامتری محوری و عرضی در انتهای آزاد آن انجام شده است. این کار روش جدیدی برای کنترل حرکت آشوبناک تیر غیر صفحه‌ای می‌باشد. در این بررسی، رزونانس داخلی تیر 1:2 بوده و رزونانس اولیه در خارج از صفحه و رزونانس زیر هارمونیک برای داخل صفحه در نظر گرفته شده است. مدل سازی تیر به کمک روش لاگرانژ انجام شده است. سپس از روش مقیاس‌های چندگانه برای تبدیل سیستم تحریک پارامتری و خارجی به معادلات میانگین‌گیری شده که نیروی ثابتی به آنها وارد می‌شود، کمک گرفته شده است. در نهایت با استفاده از شبیه سازی عددی، کنترل حلقه بازی برای حرکت آشوبناک تیر یک سرگردار غیرصفحه‌ای با تحریک در انتهای آزاد آن طراحی شده است تا بتواند ارتعاشات تیر را در یک راستا محدود نماید. نتایج حاصله بصورت منحنی‌هایی که محدوده پایداری را نشان می‌دهد نمایش داده شده است.

## کلیدواژه:

حرکت آشوبناک - تحریک پارامتری - تیر یک سرگردار - کنترل ارتعاشات.

1- استادیار، دانشکده مهندسی خودرو، دانشگاه علم و صنعت ایران

2- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

3- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی خودرو، دانشگاه علم و صنعت ایران

## 1- مقدمه

آزاد تیر یک سرگردار موجب ارتعاش غیر صفحه‌ای عرضی می‌شود. به خاطر در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ تیر مساله دارای ترم‌های غیر خطی می‌باشد. دینامیک تیر یک سرگردار غیر صفحه‌ای کاربردهای مهمی در ایستگاه‌های فضایی، ماهواره‌ها، آنتن‌ها و بازوهای مکانیکی انعطاف‌پذیر دارد. با گسترش دامنه تئوری‌های دینامیک غیرخطی، فهم بهتری از پدیده‌های پیچیده ناشی از مباحث غیرخطی تیر یک سرگردار ایجاد شد.

معادله حرکت برای تیر یک سرگردار به صورت معادله‌های دیفرانسیل جزئی با تحریک پارامتری می‌باشد، که با کمک روش مقیاس‌های چندگانه از سیستم تحریک پارامتری و خارجی به معادلات میانگین‌گیری شده که نیروی ثابتی به آنها وارد می‌شود، تبدیل می‌شود. این روش به ما نشان می‌دهد که تحریک عرضی در راستای  $z$  تأثیر به‌سزایی در ارتعاشات تیر دارد. این روش نشان می‌دهد که روش جدیدی برای کنترل حرکت این نوع تیر با تغییر نیرویی وجود دارد.

## 2- بررسی دینامیک تیر یک سرگردار غیرخطی غیر صفحه‌ای با تحریک پارامتری

## فرمولبندی مسئله:

پاسخ برای تیر یک سرگردار غیر صفحه‌ای با سطح مقطع مربعی که یکی از مودهای آن تحت تحریک پارامتریک قرار گرفته را در نظر می‌گیریم. علامت گذاری به کار رفته در این آنالیز به صورت زیر است.

$t$ : زمان،  $s$ : مختصات محوری در طول محور الاستیک قبل از تغییر شکل.  $U(s,t)$ ،  $v(s,t)$  و  $w(s,t)$  تغییر مکانی مرکز ثقل  $s$  در طول محورها  $x$ ،  $y$ ،  $z$  به ترتیب هستند و  $\phi(s,t)$  زاویه چرخش مقطع عرضی تیر حول محور  $z$  است. علاوه بر این،  $m$  جرم واحد طول  $J_x$ ،  $J_y$  و  $J_z$  ممان اینرسی‌های جرم اصلی،  $D_{11}$ ،  $D_{22}$ ،  $D_{33}$  سفتی پیچشی،  $D_{12}$  و  $D_{13}$  سفتی‌های خمشی،  $AE$  سفتی طولی و  $c$  ضریب استهلاک ویسکوز می‌باشد. تحریک هارمونیک محوری به فرم  $2F_1 \cos(\Omega_1 t)$  و تحریک‌های عرضی در راستاهای  $y$  و  $z$  نیز به ترتیب به فرم‌های  $2F_2 \cos(\Omega_2 t)$  و  $2F_3 \cos(\Omega_3 t)$  مطابق شکل (8) می‌باشند. معادله بی‌بعد شده برای تیر یک سرگردار غیرخطی، غیر صفحه‌ای تحت تحریک نیرویی و پارامتری به صورت زیر در می‌آید. [8]

قصد داریم مدل غیر خطی و اثرات متقابلی که ممکن است در تیر یک سرگردار با تحریک خارجی رخ دهد را ارائه دهیم. بال‌های هواپیما، پره‌های هلیکوپتر، لوله تفنگ و ساختمان‌های مرتفع تنها تعدادی از نمونه‌های مکانیکی و ساختمانی موجود هستند که در طراحی آنها، آنالیز ارتعاشی سازه‌ها به‌طور کلی و تیرها به‌طور اخص بسیار ضروری و حیاتی است. مدلسازی خطی این سازه‌ها می‌تواند نادرست، ناکافی و گمراه کننده باشد مخصوصاً زمانی که دامنه نوسان‌ها زیاد شده و فرکانس‌های طبیعی به‌طور فزاینده‌ای به این دامنه‌ها وابسته می‌شوند. غیر خطی بودن مسئله ممکن است مودهای پیچشی، خمشی و طولی از یک سازه را با یکدیگر کوپل کرده و بنابراین عکس العمل به یک تحریک هارمونیک ساده می‌تواند هم یک پاسخ هارمونیک ساده باشد و هم یک پاسخ بسیار پیچیده شامل مودهای فراوان که باعث تکان‌های نامطلوبی می‌شود. بنابراین چاره‌ای نیست جز اینکه، این پاسخ‌ها باید تماماً محاسبه و در طراحی سازه‌ها به کار گرفته شوند وگرنه نتایج غیر قابل استناد می‌تواند در بعضی از نمونه‌ها مصیبت بار باشد.

King و Haight [1] پایداری حرکت برای تحریک پارامتری یک میله را بررسی کردند و نشان دادند که حرکت‌های صفحه‌ای همواره پایدار هستند و مودهای غیر صفحه‌ای آن تا زمانی که ترم‌های غیرخطی تأثیر داده نشده‌اند، تحریک نمی‌شوند. Hodges و Dowell [2] مجموعه روابط حاکم بر حرکت تیغه‌های روتور را با کمک اصل همپلتون بررسی و با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی درجه سه به حل آن پرداختند. Crespo da Silva [3,4] مجموعه معادلات انتگرالی-دیفرانسیلی حاکم بر حرکت تیرهای غیرقابل انبساط، غیرخطی در هندسه و اینرسی را به‌دست آوردند، آنها این معادلات را به روش مقیاس‌های چند گانه ترم‌های مهم هندسی مشخص کردند، Dagundji و Mukhopadhyay [5] به بررسی پاسخ تیر یک سرگردار با تحریک پارامتری در فرکانس نزدیک به مجموع اولین مود خمش و پیچش پرداختند.

Anderson et al. [6] با بهبود مدل تئوری، بر اساس روش میانگین‌گیری، به بررسی انتقال انرژی بین مودهای تیر یک سرگردار تحت تحریک پارامتری پرداخت. Arafat et al. [7] با مطالعه پاسخ تیر غیر صفحه‌ای فلزی تحت تحریک اولیه پارامتری، Bifurcations‌های موجود و حرکت آشوبناک آن را به‌دست آورد. در حالت کلی، تحریک محوری و عرضی در انتهای

$$v(s,t)=y(t)G(s) \quad (5)$$

$$w(s,t)=z(t)G(s) \quad (6)$$

که تابع  $G(s)$  تابع شکل مود برای ارتعاشات عرضی تیر خطی یک سرگردار می‌باشد، و به شرح زیر است:

$$G(s) = \cosh(rs) - \cos(rs) \quad (7)$$

$$-\frac{\cosh(r) + \cos(r)}{\sinh(r) + \sin(r)} [\sinh(rs) - \sin(rs)],$$

که تابع  $G(s)$  معادله دیفرانسیل زیر را ارضا می‌کند.

$$G'' - r^4 G = 0, \quad (8)$$

با شرایط مرزی زیر

$$G(0) = G'(0) = G''(1) = G'''(1) = 0, \quad (9)$$

که  $r$  در معادله دیفرانسیل از معادله مشخصه زیر به دست

$$\text{Cosh}(r) \cos(r) + 1 = 0 \quad (10)$$

با معرفی متغیر  $\hat{t} = r^2 t$ ، که  $\text{hat}$  را برای راحتی در محاسبات بعدی نمی‌نویسیم، با جایگذاری معادله (5) و (6) در معادلات حرکت (1) و (2) و ضرب طرفین در  $G(s)$  و با انتگرال‌گیری از معادله نسبت به  $s$  از 0 تا 1 معادله‌های میانگین‌گیری شده به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\ddot{y} + c \dot{y} + b_y \ddot{y} - 2a_1 F_1 \cos(\Omega_1 t) y \quad (11)$$

$$+ a_2 y \left( \ddot{y} \ddot{y} + \dot{y}^2 + \ddot{z} \ddot{z} + \dot{z}^2 \right) + a_3 b_y y^3$$

$$+ \left[ b_y a_3 + (1 - b_y) a_4 - \frac{1}{b_y} (1 - b_y)^2 a_5 \right] y z^2$$

$$- 2\bar{F}_1 \cos(\Omega_1 t) (y^3 + y z^2) = f_1 \cos(\Omega_2 t)$$

$$\ddot{z} + c \dot{z} + b_y \ddot{z} - 2a_1 F_1 \cos(\Omega_1 t) z \quad (12)$$

$$+ a_2 z \left( \ddot{y} \ddot{y} + \dot{y}^2 + \ddot{z} \ddot{z} + \dot{z}^2 \right) + a_3 b_y z^3$$

$$- \left[ (1 - b_y) a_4 - \frac{1}{b_y} (1 - b_y)^2 a_5 - b_y a_3 \right] z y^2$$

$$- 2\bar{F}_1 \cos(\Omega_1 t) (z^3 + z y^2) = f_2 \cos(\Omega_2 t)$$

$$\ddot{v} + \bar{c} \dot{v} + b_y v^{iv} + F_1 \cos(\Omega_1 t) v'' \quad (1)$$

$$= (1 - b_y) \left[ w'' \int_1^s v'' w'' ds - w''' \int_0^s v'' w' ds \right]'$$

$$- \frac{1}{b_y} (1 - b_y)^2 \left[ w'' \int_0^s \int_1^s v'' w'' ds ds \right]''$$

$$- b_y \left[ v' (v' v'' + w' w'') \right]'$$

$$- \frac{1}{2} \left[ v' \int_1^s \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right\} ds \right]'$$

$$- F_1 \cos(\Omega_1 t) \left[ v' (v'^2 + w'^2) \right]'$$

$$+ F_2(s) \cos(\Omega_2 t),$$

$$\ddot{w} + \bar{c} \dot{w} + w^{iv} + F_1 \cos(\Omega_1 t) w'' \quad (2)$$

$$= -(1 - b_y) \left[ v'' \int_1^s v'' w'' ds - v''' \int_0^s w'' v' ds \right]'$$

$$- \frac{1}{b_y} (1 - b_y)^2 \left[ v'' \int_0^s \int_1^s v'' w'' ds ds \right]''$$

$$- b_y \left[ w' (v' v'' + w' w'') \right]'$$

$$- \frac{1}{2} \left[ w' \int_1^s \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right\} ds \right]'$$

$$- F_1 \cos(\Omega_1 t) \left[ w' (v'^2 + w'^2) \right]'$$

$$+ F_3(s) \cos(\Omega_2 t),$$

که  $\text{dot}$  و  $\text{prime}$  به ترتیب مشخص کننده مشتق نسبت به  $t$  و  $x$  می‌باشد.  $\bar{c}$  نمایانگر ضریب دمپینگ و  $\beta_y$  نسبت سختی صفحه‌ای و غیر صفحه‌ای می‌باشد که به صورت  $\beta_y = \frac{D_s}{D_n}$  می‌باشد. شرایط مرزی به صورت زیر می‌باشند:

$$v = 0, v' = 0, w = 0 \text{ و } w' = 0 \text{ در } s = 0 \quad (3)$$

$$v'' = 0, v''' = 0, w'' = 0 \text{ و } w''' = 0 \text{ در } s = L \quad (4)$$

### 3- بدست آوردن پاسخ برای معادلات حرکت

برای ادامه تحلیل به روش گالرکین را برای سیستم دو درجه آزادی غیرخطی تحت تحریک نیرویی و پارامتریک اجرا می‌کنیم. برای موده‌های صفحه‌ای و غیر صفحه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + eD_1 + \dots)^2 = D_0^2 + 2eD_0D_1 + \dots \quad (19)$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial T_k}, k = 0, 1 \quad \text{که}$$

با فرض  $\beta_y = \alpha_1^2 = 1/4$  و این که رزونانس داخلی 2:1 برای معادلات حرکت و تحریک پارامتری نوسانات زیرهارمونیک (1/2) در حالت صفحه‌ای و نوسانات اولیه در حالت رزونانسی در خارج از صفحه فرض می‌گردد. برای رنانس به صورت زیر قابل شرح است:

$$\Omega_2^2 = \Omega_1^2, \quad w_1^2 = b_y = \frac{1}{4}\Omega_1^2 + es_1, \quad (20)$$

$$1 = w_2^2 = \Omega_1^2 + es_2,$$

که  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  پارامتر detuning می‌باشد. برای این تحلیل  $\Omega_1 = 1$  را در نظر می‌گیریم. با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه بر روی معادلات دیفرانسیل داریم با جدا کردن ضرایب هم مرتبه  $e$  داریم:

$$D_0^2 y_0 + \beta_y y_0 = 0 \xrightarrow{\beta_y = 1/4} D_0^2 y_0 + \frac{1}{4} y_0 = 0 \quad (21)$$

$$D_0^2 z_0 + z_0 = 0 \quad (22)$$

حل معادلات فوق به صورت فرم مختلط زیر در می‌آید.

$$y_0 = A(T_1)e^{i\frac{1}{2}T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\frac{1}{2}T_0} \quad (23)$$

$$z_0 = B(T_1)e^{iT_0} + \bar{B}(T_1)e^{-iT_0} \quad (24)$$

که  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  مزدوج مختلط  $A$  و  $B$  هستند. برای مرتبه  $\varepsilon^1$

$$D_0^2 y_1 + \frac{1}{4} y_1 = -2D_0 D_1 y_0 - c D_0 y_0 - s_1 y_0 + a_1 F_1 (e^{iT_0} + e^{-iT_0}) y_0 - a_2 y_0 \{ y_0 D_0^2 y_0 + (D_0 y_0)^2 + z_0 D_0^2 z_0 + (D_0 z_0)^2 \} - \frac{1}{4} a_3 y_0^3 - \left( \frac{1}{4} a_3 + \frac{3}{4} a_4 - \frac{9}{4} a_5 \right) y_0 z_0^2 + \frac{1}{2} f_1 (e^{iT_0} + e^{-iT_0}), \quad (25)$$

برای به دست آوردن جواب اختلالات زیر را فرض می‌کنیم:

$$a_2 \rightarrow e a_2, \quad a_3 \rightarrow e a_3, \quad (13)$$

$$a_4 \rightarrow e a_4, \quad a_5 \rightarrow e a_5,$$

$$F_1 \rightarrow e F_1, \quad \bar{F}_1 \rightarrow e^2 \bar{F}_1,$$

$$c \rightarrow e c, \quad f_1 \rightarrow e f_1,$$

$$f_2 \rightarrow e f_2,$$

در نتیجه معادلات حرکت به صورت زیر در می‌آید:

$$\ddot{y} + e c \dot{y} + b_y y - 2e a_1 F_1 \cos(\Omega_1 t) y \quad (14)$$

$$+ e a_2 y (y \dot{y} + \dot{y}^2 + z \dot{z} + \dot{z}^2) + e a_3 b_y y^3$$

$$+ e \left[ b_y a_3 + (1 - b_y) a_4 - \frac{1}{b_y} (1 - b_y)^2 a_5 \right] y z^2$$

$$- 2e^2 \bar{F}_1 \cos(\Omega_1 t) (y^3 + y z^2) = e f_1 \cos \Omega t,$$

$$\ddot{z} + e c \dot{z} + z - 2e a_1 F_1 \cos(\Omega_1 t) z \quad (15)$$

$$+ e a_2 z (y \dot{y} + \dot{y}^2 + z \dot{z} + \dot{z}^2) + e a_3 z^3$$

$$+ e \left[ b_y a_3 - (1 - b_y) a_4 - \frac{1}{b_y} (1 - b_y)^2 a_5 \right] y z^2$$

$$- 2e^2 \bar{F}_1 \cos(\Omega_1 t) (y^3 + y z^2) = e f_2 \cos \Omega t.$$

که روابط بالا شامل تحریک و نیروهای پارامتری می‌باشد که نشان دهنده غیر خطی‌های نوسانات صفحه‌ای و غیر صفحه‌ای تیر یک سرگیردار می‌باشد. در ادامه با روش مقیاس‌های چندگانه به حل می‌پردازیم.

#### 4- تحلیل اختلالات

با کمک روش مقیاس‌های چندگانه [9] برای پیدا کردن جواب

معادلات فرض زیر را در نظر می‌گیریم

$$y(t, \varepsilon) = y_0(T_0, T_1) + \varepsilon y_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (16)$$

$$z(t, \varepsilon) = z_0(T_0, T_1) + \varepsilon z_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (17)$$

که در آن  $T_1 = t, T_2 = \varepsilon t$  می‌باشد، و برای اپراتورهای مشتق

نیز خواهیم داشت

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \dots = D_0 + e D_1 + \dots, \quad (18)$$

برای A و B فرم کارترین را در نظر می‌گیریم.

$$A(T_1) = \frac{1}{2}[x_1(T_1) + ix_2(T_1)], \quad (31)$$

$$B(T_1) = \frac{1}{2}[x_3(T_1) + ix_4(T_1)], \quad (32)$$

که  $x_n$ ,  $n=1,2,3,4$  توابعی حقیقی و وابسته  $T_1$  می‌باشند و با جایگذاری (31) و (32) در معادله‌های (29) و (30) و با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی و  $\frac{dx_n}{dT_1}$  را به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -\frac{1}{2}cx_1 - (s_1 + a_1F_1)x_2 \\ & + \frac{1}{16}(2a_2 - 3a_3)x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ & - b_1x_2(x_3^2 + x_4^2), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\frac{1}{2}cx_2 + (s_1 - a_1F_1)x_1 \\ & - \frac{1}{16}(2a_2 - 3a_3)x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ & + b_1x_1(x_3^2 + x_4^2), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & -\frac{1}{2}cx_3 - \frac{1}{2}s_2x_4 \\ & + \frac{1}{8}(2a_2 - 3a_3)x_4(x_3^2 + x_4^2) \\ & - b_2x_4(x_1^2 + x_2^2), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -\frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}s_2x_3 - \frac{1}{2}cx_4 \\ & - \frac{1}{8}(2a_2 - 3a_3)x_3(x_3^2 + x_4^2) \\ & + b_2x_3(x_1^2 + x_2^2), \end{aligned} \quad (36)$$

که در آن

$$\begin{aligned} b_1 = & \frac{1}{8}(a_3 + 3a_4 - 9a_5), \\ b_2 = & \frac{1}{16}(4a_3 - 3a_4 - 9a_5). \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 z_1 + z_1 = & -2D_0 D_1 z_0 - cD_0 z_0 \\ & - s_1 z_0 + a_1 F_1 (e^{iT_0} + e^{-iT_0}) z_0 \\ & - a_2 z_0 \{y_0 D_0^2 y_0 + (D_0 y_0)^2 \\ & + z_0 D_0^2 z_0 + (D_0 z_0)^2\} \\ & - a_3 z_0^3 - (a_3 - \frac{3}{4}a_4 - \frac{9}{4}a_5) z_0 z_0^2 \\ & + \frac{1}{2}f_2 (e^{iT_0} + e^{-iT_0}). \end{aligned} \quad (26)$$

با جایگذاری (20)، (23) و (24) در معادلات (25) و (26) و از آنجا که  $\cos(T_0) = \frac{1}{2}(e^{iT_0} + e^{-iT_0})$  با پیدا و جدا کردن ضریب ترم سکولار معادلات به شکل زیر در می‌آیند.

$$\begin{aligned} D_0^2 y_1 + \frac{1}{4}y_1 = & \{-iD_1 A - i\frac{1}{2}cA - s_1 A \\ & + a_1 F_1 \bar{A} + \frac{1}{2}(a_2 - \frac{3}{2}a_3)A^2 \bar{A} \\ & - (a_3 + 3a_4 - 9a_5)AB\bar{B}\}e^{\frac{i}{2}T_0} \\ & + cc + NST, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 z_1 + z_1 = & \{-2iD_1 B - icB - s_2 B \\ & + (2a_2 - 3a_3)B^2 \bar{B} \\ & - 2(a_3 - \frac{3}{4}a_4 - \frac{9}{4}a_5)AB\bar{B} \\ & + \frac{1}{2}f_2\}e^{iT_0} \\ & + cc + NST, \end{aligned} \quad (28)$$

که  $cc$  و  $NST$  به ترتیب نشان دهنده مزدوج مختلط و جملاتی که ترم‌های سکولار ندارند، می‌باشند. با مشخص شدن ترم سکولار و برابر صفر قرار دادن ضریب آن داریم:

$$\begin{aligned} D_1 A = & -\frac{1}{2}cA + is_1 A - ia_1 F_1 \bar{A} \\ & - i\frac{1}{2}(a_2 - \frac{3}{2}a_3)A^2 \bar{A} \\ & - i\frac{1}{2}(a_3 + 3a_4 - 9a_5)AB\bar{B}. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} D_1 B = & -\frac{1}{2}cB + i\frac{1}{2}s_2 B \\ & - i(a_2 - \frac{3}{2}a_3)B^2 \bar{B} \\ & - i(a_3 - \frac{3}{4}a_4 - \frac{9}{4}a_5)BA\bar{A} - i\frac{1}{4}f_2. \end{aligned} \quad (30)$$

صفحه ورزونانس اصلی پارامتری - رزونانس اولیه برای مود خارج از صفحه متمرکز شده است.

بر اساس نتایج عددی که در بالا به دست آمد دریافتیم که آنجا تعداد حالت مختلفی برای حرکت برای حل تعادلی معادله مقدار میانگین، از  $f_2=66.8$  تا  $f_2=318.8$  وجود دارد.

در شکل (1) به ازای مقدار  $f_2=66.8$  نمودارهای فاز و پاسخ را می توان ملاحظه کرد. در شکل (2) با بالا رفتن  $f_2$  و رسیدن به  $f_2=76.8$  نوع limit cycle و حالت پاسخ عوض می شود. در حالت بعدی شکل (3) برای نیروی کنترلی  $f_2=82.8$  با تغییر در نمودار فاز  $(x_1, x_2)$  پاسخ جدیدی را نمایش می دهد.

در شکل (4) نیز همان نمودارها را به ازای  $f_2=158.8$  مشاهده می توان کرد. در شکل (5) با نیروی  $f_2=162.8$  به تغییر limit cycle ایجاد شده پرداخته شده است. در انتها نیز در شکل (7) با نیروی limit cycle  $f_2=318.8$  و پاسخ جدیدی را به دست می دهد.

از شبیه سازی عددی مشخص شده است که شکل حرکات آشوبناک برای مود داخل صفحه کاملاً متفاوت از حالت مود خارج از صفحه می باشد. بعلاوه آنالیز مذکور نشان می دهد که مود داخل صفحه و مود خارج از صفحه نوسانات غیر خطی تیر یک سر گیر دار باید به صورت همزمان در نظر گرفته شوند تا زمانی که داخل و خارج صفحات اصلی سختی خمشی به صورت متفاوت وجود دارد، به این دلیل که

$$b_r = \frac{D_r}{D_h} \neq 1$$

در این تحقیق تحریک عرضی در راستای  $z$  و یک نیروی کنترلی که می تواند پاسخ نوسانات غیر خطی غیر سطحی تیر یک سر گیر دار در حالت سکون را کنترل کند، در نظر گرفته شده است. این نیروی مغشوش ثابت در معادله مقدار میانگین گیری شده (11) و (12) یک نیروی کنترلی ثابت حلقه باز می باشد. نتایجی که در اینجا به دست آمد، نشان می دهد که این نیروی آشفتگی ثابت تاثیر مهمی بر پاسخ سیستم خودکار غیر خطی دارد.

آنچه که از تحلیل مذکور دیده می شود این است که نیروی اغتشاشی ثابت  $f_2$  در معادله مقدار میانگین (4,30) وجود دارد که برای وضعیت رزونانس داخلی 2:1، رزونانس پارامتریک اولیه 1/2 زیر رزونانس هارمونیک برای مود داخل صفحه و رزونانس پارامتری اصلی، رزونانس اولیه برای مود خارج از صفحه می باشد. در نتیجه گیری نشان داده خواهد شد که این نیروی اغتشاشی ثابت  $f_2$  برای کنترل حلقه باز با نیروی ثابت می باشد که حرکات آشوبناک را در یک دوره  $n$  حرکت یا حالت ایستا برای نوسانات غیر خطی غیر صفحه ای تیر یک سر گیر دار را کنترل می کند. زیرا در حضور نیروی اغتشاشی ثابت  $f_2$  چندین پدیده مهم غیر خطی در معادله مقدار میانگین گیری شده اتفاق می افتد.

### 5- شبیه سازی عددی، حرکات آشوبناک و کنترل

معادله مقدار متوسط (33-36) را انتخاب کردیم تا شبیه سازی عددی را انجام دهیم. برای آنالیز عددی حرکات آشوبناک و کنترل نوسانات غیر خطی غیر سطحی تیر یک سر گیر دار مورد بحث با تحریک محوری هارمونیک و تحریک عرضی در انتهای آزاد در این بخش از یک نرم افزار Mathematica استفاده کرده ایم. پاسخ مود خارج از صفحه یک حرکت متناوب است. دیگر پارامترها و شرایط اولیه به صورت زیر انتخاب شده اند:

$$c=0.11, \quad s_1=2.0, \quad s_2=6.5, \quad (38)$$

$$a_1=1, \quad a_2=-4.2, \quad a_3=2.01,$$

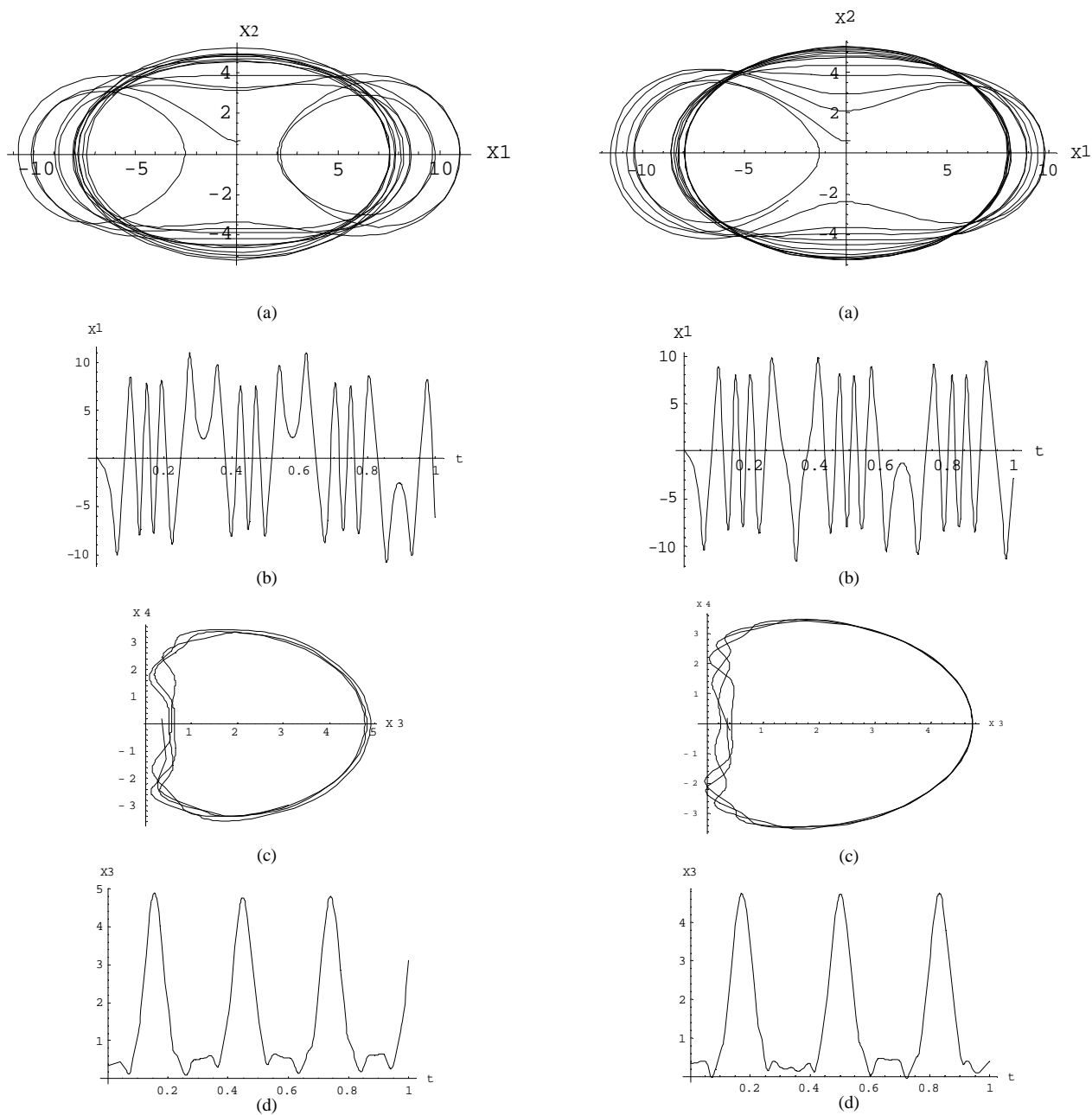
$$b_1=5.1b_2=-0.23, \quad x_{10}=0.185,$$

$$x_{20}=0.655, \quad x_{30}=0.35, \quad x_{40}=0.18,$$

شکل 1 (a)-(d) به ترتیب صفحه فاز روی صفحات  $(x_1, x_2)$ ،  $(x_3, x_4)$  و به صورت موجی روی صفحات  $(t, x_1)$ ،  $(t, x_3)$  را نمایش می دهد.

### 6- نتایج و بحث

حرکت بی نظم و کنترل آن برای نوسانات غیر خطی غیر سطحی تیر یک سر گیر دار مورد بحث در اثر تحریک محوری هارمونیک و تحریک عرضی در انتهای آزاد در این پژوهش برای اولین بار با استفاده از شبیه سازی عددی بررسی شده است. این تحقیق بروی وجود توام 2:1 رزونانس داخلی، پارامتر اصلی رزونانس 1/2، رزونانس هارمونیک فرعی برای مود داخل

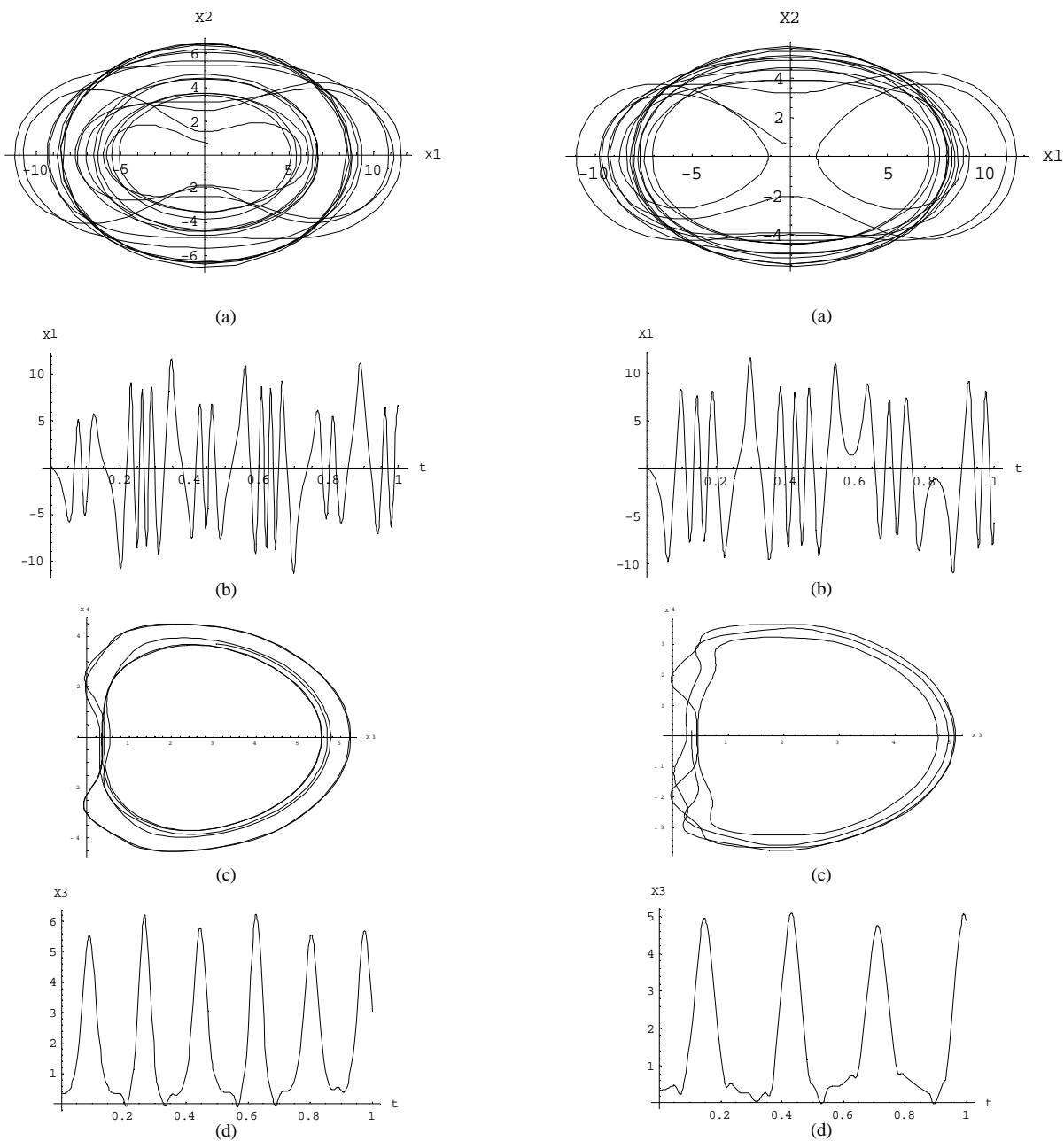


شکل (1): تحریک هارمونیک عرضی در سر آزاد تیر یک سر گیردار به ازای مقادیر عددی  $F1 = 61.7, f2 = 66.8$ .

شکل (2): تحریک هارمونیک عرضی در سر آزاد تیر یک سر گیردار به ازای مقدار عددی  $f2 = 76.8$  سایر شرایط مانند نمودار 1

(a) نمودار فاز  $(x1, x2)$   
 (b) پاسخ در صفحه  $(t, x1)$   
 (c) نمودار فاز  $(x3, x4)$   
 (d) نمودار فاز  $(t, x3)$ .

(a) نمودار فاز  $(x1, x2)$   
 (b) پاسخ در صفحه  $(t, x1)$   
 (c) نمودار فاز  $(x3, x4)$   
 (d) نمودار فاز  $(t, x3)$ .



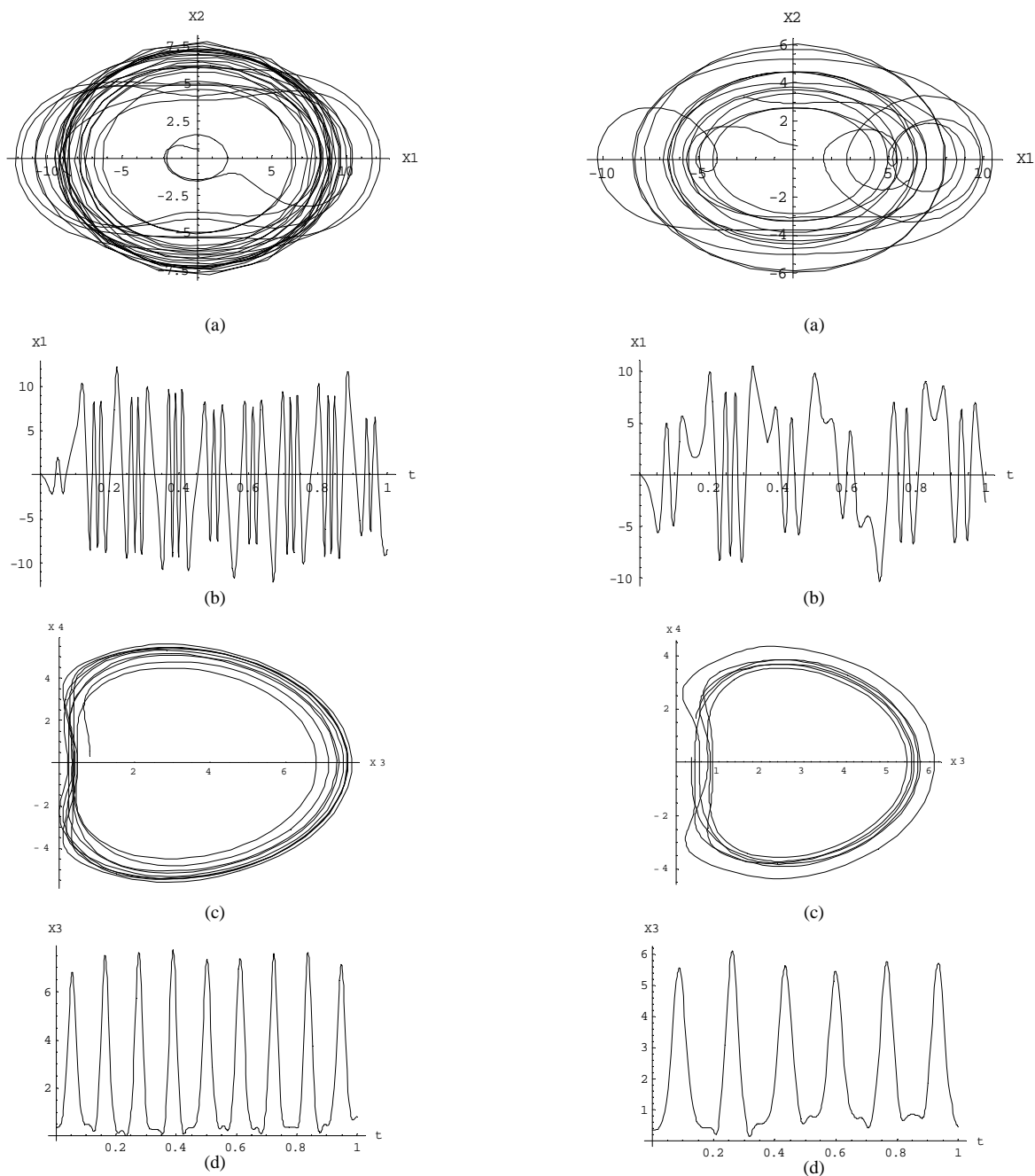
شکل (3): تحریک هارمونیک عرضی در سر آزاد تیر یک سر گیردار به ازای مقدار عددی  $f_2=82.8$  سایر شرایط مانند نمودار 1

شکل (4): تحریک هارمونیک عرضی در سر آزاد تیر یک سر گیردار به ازای مقدار عددی  $f_2=158.8$  سایر شرایط مانند نمودار 1

(a) نمودار فاز  $(x_1, x_2)$   
 (b) پاسخ در صفحه  $(t, x_1)$   
 (c) نمودار فاز  $(x_3, x_4)$   
 (d) نمودار فاز  $(t, x_3)$

(a) نمودار فاز  $(x_1, x_2)$   
 (b) پاسخ در صفحه  $(t, x_1)$   
 (c) نمودار فاز  $(x_3, x_4)$   
 (d) نمودار فاز  $(t, x_3)$





شکل (6): تحریک هارمونیک عرضی در سر آزاد تیر یک سر گیردار به ازای مقدار عددی،  $f_2=318.8$  سایر شرایط مانند نمودار 1

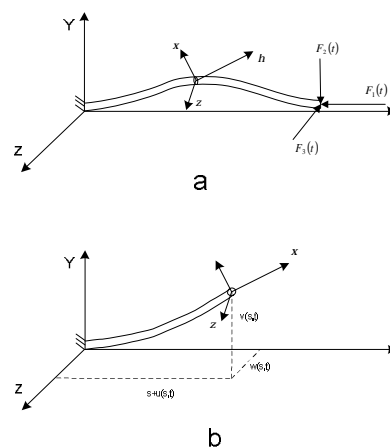
(a) نمودار فاز  $(x_1, x_2)$   
 (b) پاسخ در صفحه  $(t, x_1)$   
 (c) نمودار فاز  $(x_3, x_4)$   
 (d) نمودار فاز  $(t, x_3)$

شکل (5): تحریک هارمونیک عرضی در سر آزاد تیر یک سر گیردار به ازای مقدار عددی،  $f_2=162.8$  سایر شرایط مانند نمودار 1

(a) نمودار فاز  $(x_1, x_2)$   
 (b) پاسخ در صفحه  $(t, x_1)$   
 (c) نمودار فاز  $(x_3, x_4)$   
 (d) نمودار فاز  $(t, x_3)$ .

## 7- مراجع

- [1] E.C. Haight, and W.W. King, "Stability of Parametrically Excited Vibrations of an Elastic Rod", Development Sin Theoretical and Applied Mechanics, No. 5, (1970), pp. 677-713.
- [2] D.H. Hodges, and E.H. Dowell, "Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted no uniform rotor blades", NASA Technical Notes, NASA TN, (1974), pp. D7818.
- [3] M.R.M. Crespo da Silva, and C.C. Glynn, "Nonlinear flexural torsional dynamics of in extensional beams. I. Equations of motion", Journal of Structural Mechanics, No. 6, (1978), pp. 437-448.
- [4] M.R.M. Crespo da Silva, and C.C. Glynn, "Nonlinear flexural torsional Dynamics of in extensional beams. II. Forced motions", Journal of Structural Mechanics, No. 6, (1978), pp. 449-461.
- [5] J. Dugundji, and V. Mukhopadhyay, "Lateral bending-torsion vibrations of a thin beam under parametric excitation", Journal of Applied Mechanics, No. 40, (1973), pp.693-698.
- [6] T.J. Anderson, A.H. Nayfeh, and B. Balachandran, "Coupling between high-frequency modes and a low-frequency mode: theory and experiment", Nonlinear Dyn., No. 11, (1996), pp. 17-36.
- [7] H.N. Arafat, A.H. Nayfeh, and C.M. Chin, "Nonlinear nonplanar dynamics of parametrically excited cantilever beams", Nonlinear Dyn., No. 15, (1998), pp. 31-61.
- [8] M.H. Yao, and W. Zhang, "Multi-pulse Shilnikov orbits and chaotic dynamics for nonlinear nonplanar motion of a cantilever beam", Int. Jour. Bifurcat Chaos, No. 15, (2005).
- [9] A.H. Nayfeh, and D.T. Mook, Nonlinear oscillations. New York: Wiley-Interscience, (1979).



شکل (7): نمای کلی تیر یک سرگیردار تحت یک بار مستقیم با تحریک پارامتری.