



ارزیابی تاثیر ثوابت ناهمگنی مواد بر ضرایب شدت تنش در ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی با استفاده از روش بدون المان پتروف گالرکین محلی (MLPG)

محمد معدل^۱، شهرام شهروئی*^۱

۱. گروه مهندسی مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

* ایمیل نویسنده مسول: shahramshahrooi@iauhvaz.ac.ir

چکیده

در این مقاله از روش بدون المان پتروف گالرکین محلی برای به دست آوردن ضریب شدت تنش در ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت بارگذاری کششی یکنواخت استفاده شده است. با بکارگیری قضیه دیورژانس و تابع پله هویساید به عنوان تابع تست درون انتگرال، انتگرال های سطحی به انتگرال های مرزی تبدیل شده و شرایط مرزی طبیعی بر روی معادلات کوپله شده اعمال گردید. برای تقریب زنی میدان جابجایی و پتانسیل الکتریکی از روش حداقل مربعات متحرک MLS استفاده شد. جهت مدل سازی میدان جابجایی و تنش، اطراف نوک ترک از روش مشاهده پذیری و اضافه نمودن گره ها و غنی سازی توابع پایه به دلیل وجود تکینگی اطراف نوک بهره گرفته شده است. همچنین از مدل تابع نمایی برای بیان تغییرات خواص جنس ماده پیزوالکتریک استفاده گردید. سپس میدان های جابجایی و پتانسیل الکتریکی تولید شده در اثر بارگذاری مکانیکی و تنش ها به ازای ثوابت ناهمگنی جنس متفاوت ماده پیزوالکتریک مدرج تابعی در راستاهای متفاوت ورق تنش از روش بدون المان محاسبه و با نتایج حاصل از نرم افزار اجزا محدود کامسول مقایسه گردید. در نهایت ضرایب شدت تنش از روش بدون المان با نتایج از حل تحلیلی مقایسه گردید که انطباق قابل قبولی را نشان داده است.

کلمات کلیدی: مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی FGPM، روش بدون المان پتروف گالرکین محلی MLPG، ضریب شدت تنش، ثوابت ناهمگنی جنس

مقدمه

در بسیاری از کاربردهای مواد پیزوالکتریک، از دو یا چند لایه از ورقه های سرامیکی پیزوالکتریک به هم چسبیده استفاده می شود. پیوند دو ماده مختلف پیزوالکتریک با خواص مکانیکی و الکتریکی متفاوت یا پیزوالکتریک یکسان ممکن است باعث ایجاد تنش بین سطوح در خط اتصال و نیز شکنندگی آنها در حین کار گردد، بنابراین برای غلبه بر محدودیت های عملکرد مواد پیزوالکتریک لایه بندی شده، بالابردن طول عمر و قابلیت اطمینان سازه های پیزوالکتریک، مفهوم مواد مدرج تابعی^۱ به کمک تکنیکهای متالورژیکی به مواد پیزوالکتریک گسترش یافته است، لذا در سالهای اخیر تولید مواد پیزوالکتریک با خاصیت مدرج تابعی مورد توجه قرار گرفته است.

پارک و سان [۱] راه حل تحلیلی را برای تمام سه مود شکست در یک واسطه پیزوالکتریک نامحدود به دست آوردند. سپس اثر میدان الکتریکی بر روی شکست سرامیکهای پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند. شیندو و همکاران [۲] یک روش تحلیلی به نام روش تبدیل انتگرالی را برای آنالیز ترک در یک نوار پیزوالکتریک نامحدود به کار بردند. ژانگ و شانگ [۳] یک راه حل دقیق برای صفحه مستطیل پیزوالکتریک مدرج تابعی با تغییرات نمایی خواص در طول ضخامت صفحه تحت بارهای مکانیکی، الکتریکی و حرارتی ارائه کردند.

اندرلین و همکاران [۴] با روش المان محدود به آنالیز دینامیکی ترک در مواد پیزوالکتریک پرداختند. آنها روش انتگرال تقابل را برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی و جابجایی الکتریکی توسعه دادند. کونا [۵] به محاسبه ضریب شدت تنش

¹ Functionally Graded Material



و ضریب شدت جابجایی الکتریکی در مواد پیزوالکتریک تحت بارگذاری مکانیکی و الکتریکی به روش المان محدود پرداخت. راثو و کونا [۶] با روش انتگرال تقابل به آنالیز شکست در مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی پرداختند. سپس ضرایب شدت تنش به دست آمده را با ضرایب شدت تنش محاسبه شده از روش برون یابی جابجایی مقایسه کردند و دریافتند که دو روش انطباق خوبی با یکدیگر دارند.

لیو و همکاران [۷] با روش بدون المان میانمایی نقاط^۱ به آنالیز استاتیکی و دینامیکی متناوب سازه های دو بعدی پیزوالکتریک پرداختند. سپس نتایج به دست آمده را با نرم افزار المان محدود آباکوس مقایسه کردند و به این نتیجه رسیدند که دو روش تطابق خوبی با هم دارند. اسلادک و همکاران [۸] روش بدون المان پتروف گالرکین محلی را برای یک نیمه هادی پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک ضد صفحه ای تحت شرایط بارگذاری دینامیکی گذرا به کار بردند. آنها به این نتیجه رسیدند که ضریب شدت جابجایی الکتریکی در نیمه هادی های پیزوالکتریک، با کاهش جریان الکتریکی افزایش می یابد. همچنین تأثیر نسبت طول ترک به اندازه نمونه را بر میزان آزاد سازی انرژی مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که حساسیت نرخ آزادسازی انرژی با افزایش نسبت طول ترک کاهش می یابد. لی و ژو [۹] با روش بدون المان گالرکین به آنالیز مواد پیزوالکتریک حاوی ترک پرداختند. آنها با محاسبه انتگرال J مستقل از مسیر برای ورق پیزوالکتریک نشان دادند که انتگرال J محاسبه شده از این روش با حل تحلیلی و روش المان محدود انطباق خوبی دارد.

معادلات اساسی حاکم

معادلات حاکم کوپل الکترومکانیکی برای جامدات پیزوالکتریک به صورت زیر بیان می گردد [۱۰]:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = c_{ijkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - e_{kij}(\mathbf{x})E_K \quad (1)$$

$$D_j(\mathbf{x}) = e_{jkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) + h_{jk}(\mathbf{x})E_K \quad (2)$$

در معادلات بالا $c_{ijkl}(\mathbf{x})$ تانسور الاستیک، $\varepsilon_{kl}(\mathbf{x})$ تانسور کرنش، $e_{jkl}(\mathbf{x})$ تانسور ثابت پیزو الکتریک، $h_{jk}(\mathbf{x})$ تانسور عایقی و E_K بردار میدان الکتریکی هستند. تانسور کرنش و بردار میدان الکتریکی نیز برحسب جابجایی ها و پتانسیل الکتریکی به صورت بیان می شود:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

$$E_j = -\Psi_{,j} \quad (4)$$

به دلیل دو بعدی بودن مسأله و تحت شرایط کرنش صفحه ای و اینکه جسم مورد نظر ایزوتروپیک عرضی است، معادلات حاکم الکترومکانیکی (۱) و (۲) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{21} \\ 0 & e_{22} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = C(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} - L(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{15} \\ e_{21} & e_{22} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = G(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} - H(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

با توجه به شرایط استاتیکی مسأله، معادلات تعادل حاکم بر میدان های الکتریکی و مکانیکی و شرایط مرزی اساسی به

¹Point Interpolation Method(PIM)



صورت زیر است:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (7)$$

$$D_{j,j} = 0 \quad (8)$$

$$u_i(\mathbf{x}) = \tilde{u}_i(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Gamma_u \quad \text{شرط مرزی اساسی} \quad (9)$$

$$t_i(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}n_j = \tilde{t}_i(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Gamma_t \quad \text{شرط مرزی طبیعی} \quad (10)$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \tilde{\Psi}(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Gamma_p \quad \text{شرط مرزی اساسی} \quad (11)$$

$$n_i D_i(\mathbf{x}) = \tilde{Q}(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Gamma_q \quad \text{شرط مرزی طبیعی} \quad (12)$$

$\tilde{u}_i(\mathbf{x})$ مقدار جابجایی معلوم روی مرز Γ_u ، مقدار تنش سطحی معلوم روی مرز Γ_t و $\tilde{\Psi}(\mathbf{x})$ و $\tilde{Q}(\mathbf{x})$ اندازه پتانسیل الکتریکی یا مقدار بار الکتریکی وارد شده به جسم روی مرزهای Γ_p و Γ_q می‌باشند. همچنین n_j مولفه زام بردار یکه عمود بر مرز Γ رو به بیرون است.

فرم ضعیف محلی معادله (۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{\Omega_s} [\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) + X_i(\mathbf{x})] u_i^*(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (13)$$

$u_i^*(\mathbf{x})$ تابع تست درون انتگرال می‌باشد.

با اعمال قضیه دیورژانس و به کارگیری تابع پله هویساید به عنوان تابع تست به صورت $u_i^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{at } \mathbf{x} \in \Omega_s \\ 0 & \text{at } \mathbf{x} \notin \Omega_s \end{cases}$ و با حذف نیروهای حجمی، فرم ضعیف محلی (۱۳) به معادله دامنه مرزی زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_{\partial\Omega_s} t_i(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (14)$$

به همین ترتیب فرم ضعیف محلی (۷) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega_s} D_{j,j}(\mathbf{x}) v^*(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (15)$$

که $v^*(\mathbf{x})$ تابع تست می‌باشد. با اعمال قضیه دیورژانس بر روی معادله (۱۵) و انتخاب تابع پله هویساید به عنوان تابع تست رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\int_{L_s + \Gamma_{sp}} Q(\mathbf{x}) d\Gamma = - \int_{\Gamma_{sq}} \tilde{Q}(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (16)$$

که در آن $Q(\mathbf{x}) = D_j n_j = (e_{jkl} u_{k,l} - h_{jk} \Psi_{,k}) n_j$ برای تقریب میدان‌های جابجایی و پتانسیل‌های الکتریکی از تقریب MLS مطابق با روابط زیر استفاده می‌شود [۱۱]:

$$u^h(\mathbf{x}) = \varphi^T(\mathbf{x}) \cdot \hat{u} = \sum_{a=1}^n \varphi^a(\mathbf{x}) u^a \quad (17)$$

$$\Psi^h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^n \varphi^a(\mathbf{x}) \Psi^a \quad (18)$$

که مقادیر u^a و Ψ^a مقادیر گره‌ای جابجایی‌ها و پتانسیل‌های الکتریکی و $\varphi^a(\mathbf{x})$ تابع شکل مربوط به گره a است. تابع وزن به کار رفته در این مقاله، تابع وزن اسپیلاین درجه چهارم است که بر روی یک ناحیه دایره‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$w^a(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6(\bar{d})^2 + 8(\bar{d})^3 - 3(\bar{d})^4, & \bar{d} \leq 1 \\ 0, & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (19)$$

(۱) خواهیم داشت: $\bar{d} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a\|}{r_a}$ ، فاصله نرمالیز شده نقطه مورد نظر \mathbf{x} تا گره \mathbf{x}_a و r_a اندازه شعاع دامنه پشتیبان می باشد. با توجه به رابطه

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] - [e][E] \quad (20)$$

با توجه به رابطه (۲۰) خواهیم داشت:

$$[\sigma] = [C] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} u^h + [e] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Psi^h \quad (21)$$

با استفاده از تقریب MLS از رابطه (۱۷) و در نظر گرفتن رابطه (۲۱)، بردار تنش سطحی $t_i(\mathbf{x})$ روی یک نقطه بر روی دایره انتگرال گیری برحسب مقادیر گره ای u^a و Ψ^a به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$t^h(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})C(\mathbf{x}) \sum_{a=1}^n B^a(\mathbf{x})u^a + N(\mathbf{x})L(\mathbf{x}) \sum_{a=1}^n P^a(\mathbf{x})\Psi^a \quad (22)$$

در رابطه فوق $N(\mathbf{x})$ بردار یکه نرمال روی نقطه مرزی $\mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$N(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

به طور مشابه با استفاده از تقریب MLS، بار الکتریکی $Q(\mathbf{x})$ برحسب مقادیر گره ای u^a و Ψ^a به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$Q^h(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})G(\mathbf{x}) \sum_{a=1}^n B^a(\mathbf{x})u^a - N_1(\mathbf{x})H(\mathbf{x}) \sum_{a=1}^n P^a(\mathbf{x})\Psi^a \quad (24)$$

در رابطه فوق $N_1(\mathbf{x})$ بردار یکه نرمال روی نقطه مرزی $\mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$N_1(\mathbf{x}) = [n_1 \quad n_2] \quad (25)$$

با جایگذاری روابط (۲۲) و (۲۵) در معادلات انتگرالی (۱۴) و (۱۶) فرم های گسسته سازی شده خطی زیر برای گره a ام به دست می آید:

$$\sum_{a=1}^n \left(\int_{L_s + \Gamma_{su}} N(\mathbf{x})C(\mathbf{x})B^a d\Gamma \right) u^a + \sum_{a=1}^n \left(\int_{L_s + \Gamma_{su}} N(\mathbf{x})L(\mathbf{x})P^a d\Gamma \right) \Psi^a = - \int_{\Gamma_{st}} \bar{t}(\mathbf{x})d\Gamma \quad (26)$$

$$\sum_{a=1}^n \left(\int_{L_s + \Gamma_{sp}} N_1(\mathbf{x})G(\mathbf{x})B^a d\Gamma \right) u^a - \sum_{a=1}^n \left(\int_{L_s + \Gamma_{sp}} N_1(\mathbf{x})H(\mathbf{x})P^a d\Gamma \right) \Psi^a = - \int_{\Gamma_{sq}} \bar{Q}(\mathbf{x})d\Gamma \quad (27)$$

معادلات فوق را می توان به شکل ماتریسی زیر بیان کرد:

$$\sum_{a=1}^n \hat{K}_{Ia}^{uu} u^a + \sum_{a=1}^n \hat{K}_{Ia}^{u\Psi} \Psi^a = f_I \quad (28)$$

$$\sum_{a=1}^n \hat{K}_{Ia}^{\Psi u} u^a - \sum_{a=1}^n \hat{K}_{Ia}^{\Psi\Psi} \Psi^a = q_I \quad (29)$$



در روابط بالا ماتریس‌های $\widehat{K}_{Ia}^{\Psi\Psi}$ ، $\widehat{K}_{Ia}^{\Psi u}$ ، $\widehat{K}_{Ia}^{u\Psi}$ ، \widehat{K}_{Ia}^{uu} ماتریس‌های سختی گره ای و بردارهای f_I و q_I نیز بردارهای نیروی مکانیکی و بار الکتریکی گره ای هستند.
اگر کل گره‌های دامنه Ω برابر N فرض شود، دستگاه معادلات خطی برای کل N گره میدان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\widehat{K}_{uu}\widehat{U} + \widehat{K}_{u\Psi}\widehat{\Psi} = \widehat{f}_u \quad (30)$$

$$\widehat{K}_{\Psi u}\widehat{U} + \widehat{K}_{\Psi\Psi}\widehat{\Psi} = \widehat{f}_q \quad (31)$$

برای اعمال شرایط مرزی از روش انتقال^۱ استفاده شده است. این روش براساس بیان مقادیر واقعی جابجایی‌ها و پتانسیل‌های الکتریکی بر حسب مقادیر مجازی (گره ای) آنها بنا نهاده شده است. در این روش مقادیر واقعی و گره ای با ماتریس‌های تبدیل زیر با یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$U = T_u \widehat{U} \quad (32)$$

$$\Psi = T_\Psi \widehat{\Psi} \quad (33)$$

که در آن:

$$U = [u_x^1 \quad u_y^1 \quad \dots \quad u_x^N \quad u_y^N]^T \quad (34)$$

$$\Psi = [\Psi^1 \quad \Psi^2 \quad \Psi^3 \quad \dots \quad \Psi^N]^T \quad (35)$$

با توجه به روابط (۳۳) و (۳۴) و روابط (۳۰) و (۳۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$K_{uu}U + K_{u\Psi}\Psi = f_u \quad (36)$$

$$K_{\Psi u}U + K_{\Psi\Psi}\Psi = f_q \quad (37)$$

که در آن:

$$K_{uu} = (T_u^{-1})^T \widehat{K}_{uu} T_u^{-1}$$

$$K_{u\Psi} = (T_u^{-1})^T \widehat{K}_{u\Psi} T_\Psi^{-1}$$

$$K_{\Psi u} = (T_\Psi^{-1})^T \widehat{K}_{\Psi u} T_u^{-1} \quad (37)$$

$$K_{\Psi\Psi} = (T_\Psi^{-1})^T \widehat{K}_{\Psi\Psi} T_\Psi^{-1}$$

$$f_u = (T_u^{-1})^T \widehat{f}_u$$

$$f_q = (T_\Psi^{-1})^T \widehat{f}_q$$

اکنون از حل دستگاه معادلات (۳۷) و حذف پارامتر Ψ از آن داریم:

$$(K_{uu} - K_{u\Psi} * K_{\Psi\Psi}^{-1} * K_{\Psi u})U = f_u - K_{u\Psi} * K_{\Psi\Psi}^{-1} * f_q \quad (38)$$

با در نظر گرفتن دو معادله زیر:

$$K_{\varepsilon q} = K_{uu} - K_{u\Psi} * K_{\Psi\Psi}^{-1} * K_{\Psi u} \quad (39)$$

¹ Transformation Method

$$f_{\varepsilon q} = f_u - K_{u\Psi} * K_{\Psi\Psi}^{-1} * f_q \quad (40)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$K_{\varepsilon q} * U = f_{\varepsilon q} \quad (41)$$

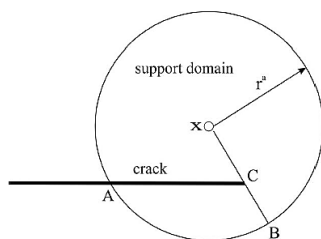
حال شرایط مرزی اساسی همانند روش اجزاء محدود برای مقادیر از پیش معلوم در دستگاه معادلات ماتریسی (۴۱) اعمال می‌گردد.

حل مسائل مکانیک شکست به روش MLPG

در روش‌های بدون المان اضافه کردن توابع برگرفته از جواب دقیق ترک در توابع پایه باعث می‌شود تا منفرد بودن میدان تنش نزدیکی نوک ترک بدون استفاده از یک چیدمان بسیار ریز قابل محاسبه شود. فلمینگ و همکاران [۱۲] نشان دادند که میدان منفرد در نوک ترک با اضافه کردن توابع زیر به توابع پایه چند جمله‌ای قابل دستیابی است و آن را تابع غنی شده نامیدند.

$$\left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\}$$

از طرفی میدان جابجایی در طول ترک دارای ناپیوستگی است، در حالی که در روش‌های بدون المان تابع تقریب MLS و مشتقات آن پیوسته و هموار است. یک روش ساده برای ارضاء ناپیوستگی میدان جابجایی معیار مشاهده پذیری^۱ است. در این روش ترک یک سطح مات و کدر فرض می‌شود. زمانی که دامنه پشتیبان برای تابع وزن ساخته می‌شود خط واصل بین نقطه مورد نظر به هر گره یک پرتو نور در نظر گرفته می‌شود. اگر پرتو نور با ترک روبرو شود قطع شده و گره مورد نظر در دامنه پشتیبان قرار نمی‌گیرد. همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده گره‌های درون دامنه ABC از دامنه پشتیبان حذف شده و یک میدان جابجایی ناپیوسته در طول ترک ایجاد شود.



شکل ۱: معیار مشاهده پذیری برای دامنه پشتیبان

میدان‌های الکترومکانیکی در مواد پیزوالکتریک ترک دار

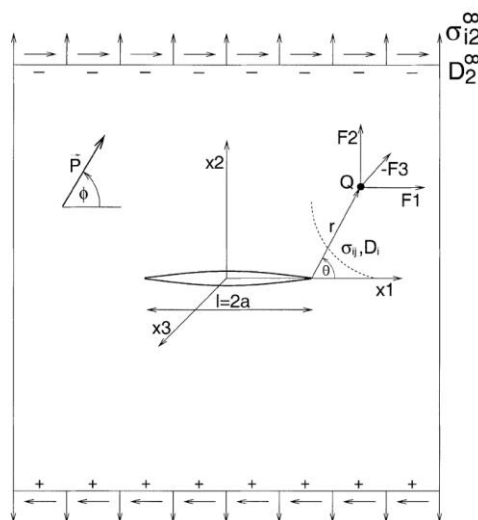
حالت کلی بارگذاری در یک صفحه پیزوالکتریک ترک دار در شکل (۲) نشان داده شده است. در این حالت هر دو بارگذاری مکانیکی و الکتریکی بر صفحه مزبور وارد شده است. میدان‌های الکترومکانیکی در اطراف نوک ترک ($r \rightarrow 0$) بر حسب ضرایب شدت تنش K_I ، K_{II} و K_{III} متناظر با سه مود باز شدگی ترک و ضریب شدت جابجایی الکتریکی^۲ K_{IV} با دسته روابط زیر بیان می‌گردند:

¹ Visibility criteria

² Electrical displacement intensity factor

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{I=1}^N K_N f_{ij}^N(\theta) \\ D_i(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{I=1}^N K_N g_i^N(\theta) \\ u_i(r, \theta) &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sum_{I=1}^N K_N d_i^N(\theta) \\ \Psi_i(r, \theta) &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sum_{I=1}^N K_N v^N(\theta)\end{aligned}\quad (42)$$

در روابط فوق $f_{ij}^N(\theta)$ ، $g_i^N(\theta)$ ، $d_i^N(\theta)$ و $v^N(\theta)$ ($N = I, II, III, IV$) توابع زاویه ای وابسته به خواص جنس هستند.



شکل ۲: حالت کلی بارگذاری در یک صفحه پیزوالکتریک ترک دار

یک رابطه ساده دیگر که در این مقاله از آن برای محاسبه ضریب شدت مود اول شکست K_I (SIF) استفاده شده است و فقط به میدان جابجایی و پتانسیل الکتریکی نزدیک نوک ترک وابسته است بصورت زیر ارائه شده است:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left(\frac{c_T e^2}{c_T K + e^2} u_2 + \frac{c_T K}{c_T K + e^2} \Psi \right) \quad (43)$$

c_T و K و e ثوابت جنس ماتریس اروین هستند که برای مواد پیزوالکتریک مختلف در کتب مرجع موجود می باشد.

نتایج و بحث :

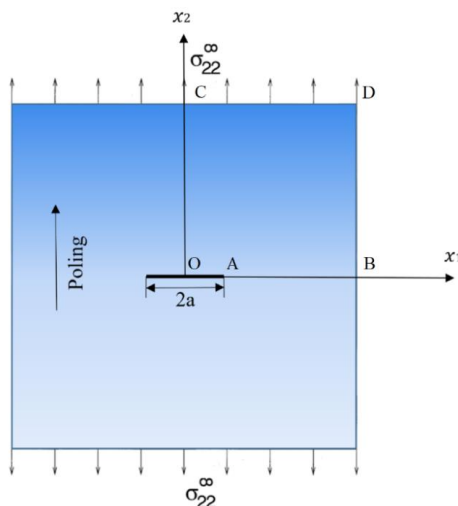
ورق پیزوالکتریک ترک دار تحت مود اول شکست

یک ورق پیزوالکتریک به عرض $W = 0.4$ و طول $L = 0.4$ متر تحت تنش کششی $\sigma = 10^6$ Pa در دو انتها و یک ترک مرکزی به طول 0.2 متر مطابق شکل (۳) در نظر گرفته شده است. مسأله تحت شرایط کرنش صفحه ای حل شده و برای محاسبه از ماده پیزوالکتریک PZT-4 با مشخصات زیر استفاده شده است:



جدول ۱: مشخصات ماده پیزوالکتریک PZT-4

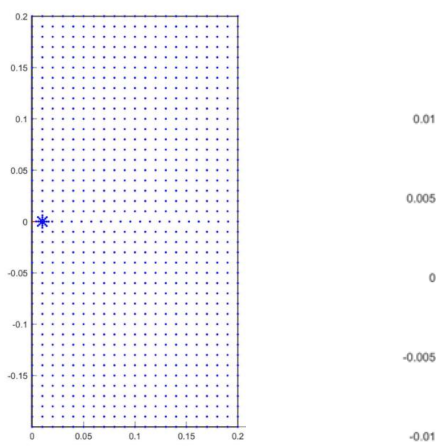
C_{11} N/m ²	C_{12} N/m ²	C_{22} N/m ²	C_{66} N/m ²	e_{15} C/m ²	e_{21} C/m ²	e_{22} C/m ²	h_{11} C/Vm	h_{22} C/Vm
$13/9 \times 10^{11}$	$7/43 \times 10^{11}$	$11/5 \times 10^{11}$	$2/56 \times 10^{11}$	$12/7$	$-5/2 \times 10^{11}$	$15/1$	$6/46 \times 10^{-9}$	$5/62 \times 10^{-9}$



شکل ۳: ورق پیزوالکتریک ترک دار تحت مود اول شکست

برای مدل سازی ورق به دلیل تقارن نیرویی و هندسی تنها نصف ورق مطابق شکل (۴) مدل می شود. توزیع گره ای در ورق شامل 21×41 گره بعلاوه ۲۴ گره اضافی در سه حلقه اطراف نوک ترک مطابق با شکل انجام شده جهت پلاریزاسیون در جهت عمود بر ترک می باشد.

جهت محاسبه عددی، اندازه دامنه پشتیبان $2/5$ برابر فاصله گرهی و شعاع دایره انتگرال گیری $r_0 = 0.0083$ متر در نظر گرفته می شود. به منظور مقایسه و اعتبار سنجی، نتایج حاصل از روش بدون المان MLPG، با نتایج به دست آمده از نرم افزار اجزاء محدود کامسول مقایسه شده که میزان انطباق و دقت حل روش حاضر را اثبات می کند. جدول (۲) مقادیر جابجایی عمودی، جدول (۳) مقادیر تنش σ_{yy} و جدول (۴) مقادیر پتانسیل الکتریکی از دو روش MLPG و نرم افزار اجزاء محدود کامسول را برحسب مختصات گره ای نشان می دهند.



شکل ۴: توزیع گره ای در نصف ورق پیزوالکتریک ترک دار و آرایش گره های غنی شده اطراف نوک ترک



جدول ۲: مقادیر جابجایی عمودی برحسب مختصات گره ای از روش MLPG و نرم افزار کامسول

مختصات گره (m)	روش MLPG $\times 10^{-7} (m)$	نرم افزار کامسول $\times 10^{-7} (m)$
(۰،۰/۰۴)	۳/۲۱	۳/۵۲
(۰،۰/۰۸)	۶/۳۷	۶/۴۶
(۰،۰/۱۲)	۹/۵۸	۹/۵۳
(۰،۰/۱۶)	۱۲/۸	۱۲/۶
(۰،۰/۲)	۱۶	۱۵/۷

جدول ۳: مقادیر تنش σ_{yy} برحسب مختصات گره ای از روش MLPG و نرم افزار کامسول

مختصات گره (m)	روش MLPG	نرم افزار کامسول
(۰/۰۱،۰)	۳/۵۴	۳/۵۷
(۰/۰۴۸،۰)	۱	۱/۰۲
(۰/۰۸۶،۰)	۱/۰۱	۱/۰۱
(۰/۱۲۴،۰)	۱/۰۱	۱
(۰/۱۶۲،۰)	۱/۰۱	۱
(۰/۲،۰)	۱/۰۱	۰/۹۹۹

جدول ۴: مقادیر پتانسیل الکتریکی برحسب مختصات گره ای از روش MLPG و نرم افزار کامسول

مختصات گره (m)	روش MLPG	نرم افزار کامسول
(۰،۰/۰۴)	۰/۹۳۰	۰/۹۲۸
(۰،۰/۰۸)	۱/۸۹۰	۱/۸۳۶
(۰،۰/۱۲)	۲/۸۷۵	۲/۷۵۰
(۰،۰/۱۶)	۳/۸۲۶	۳/۶۶۵
(۰،۰/۲)	۴/۷۹۲	۴/۵۷۸

برای محاسبه ضریب شدت تنش از رابطه (۴۳)، استفاده گردیده و با مقدار دقیق محاسبه شده ضریب شدت تنش برای یک ورق نامحدود از مرجع [۱۳] مقایسه شده است. جدول (۵) مقادیر محاسبه شده ضریب شدت تنش از روش MLPG و حل تحلیلی و میزان درصد خطای آن را نشان می دهد.

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (44)$$



جدول ۵: مقادیر ضریب شدت تنش از روش MLPG و حل دقیق

درصد خطا	روش MLPG	حل دقیق
	$K_I(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})$	$K_I(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})$
۰/۸	۰/۱۷۵۸۰	۰/۱۷۷۲۵

ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی ترک دار تحت مود اول شکست

یک ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی با شرایط مسئله بخش قبل در نظر گرفته می شود. در این مسئله از مدل تابع نمایشی برای تغییرات خواص جنس به صورت زیر استفاده شده است:

$$c_{ijkl}(\mathbf{x}) = c_{ijkl0} \exp(\alpha x_2)$$

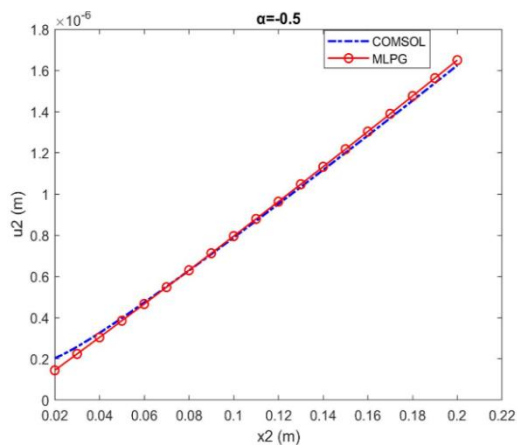
$$e_{ijk}(\mathbf{x}) = e_{ijk0} \exp(\alpha x_2) \quad (45)$$

$$h_{ij}(\mathbf{x}) = h_{ij0} \exp(\alpha x_2)$$

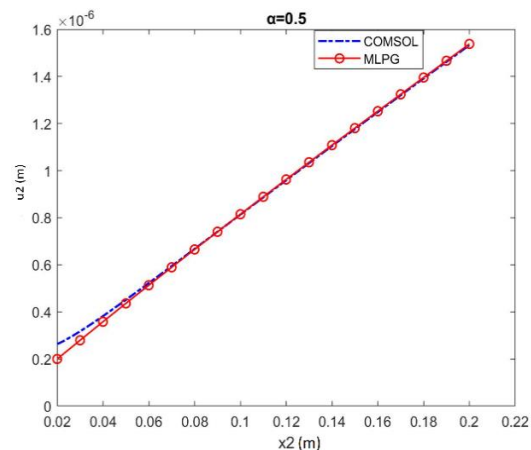
که در آن c_{ijkl0} , e_{ijk0} و h_{ij0} به ترتیب تانسورهای الاستیک، پیزوالکتریک و عایقی متناظر با مسئله قبلی (PZT-4) در صفحه $x_3 = 0$ می باشند و α ثابت ناهمگنی تغییرات جنس ماده پیزوالکتریک است و با مقادیر $\alpha = 1, 0.5, -0.5, -1$ در نظر گرفته می شوند. همچنین از تغییرات ضریب پواسون به دلیل کوچک بودن این ضریب صرف نظر می گردد. جهت محاسبه عددی، اندازه دامنه پشتیبان $2/5$ برابر فاصله گره ای و شعاع دایره انتگرال گیری $r_0 = 0/0073$ متر در نظر گرفته می شود. جدول (۶) جابجایی عمودی بر حسب مختصات گره ای و شکل های (۵) و (۶) نمودار تغییرات جابجایی عمودی در امتداد خط OC به ازای ثوابت ناهمگنی $\alpha = 0/5, -0/5$ را با استفاده از دو روش MLPG و نرم افزار اجزاء محدود کامسول نشان می دهند. همچنین از آنها مشاهده می شود که مقادیر ثابت ناهمگنی مثبت باعث کاهش میزان جابجایی و مقادیر ثابت ناهمگنی منفی باعث افزایش میزان جابجایی در راستاهای مذکور گشته، همچنین میزان انطباق و دقت حل روش حاضر را اثبات می کنند.

جدول ۶: مقادیر جابجایی عمودی بر حسب مختصات گره ای به ازای ثوابت ناهمگنی متفاوت

مختصات گره (m)	$\alpha = -0/5$		$\alpha = 0/5$	
	روش MLPG	نرم افزار کامسول	روش MLPG	نرم افزار کامسول
	$\times 10^{-7} (m)$	$\times 10^{-7} (m)$	$\times 10^{-7} (m)$	$\times 10^{-7} (m)$
(۰،۰/۰۴)	۳/۳۸	۳/۳۲	۳/۷۴	۳/۸۹
(۰،۰/۰۸)	۶/۵۶	۶/۳۰	۶/۷۷	۶/۶۷
(۰،۰/۱۲)	۹/۷۷	۹/۵۷	۹/۷۴	۹/۶۳
(۰،۰/۱۶)	۱۳/۱	۱۲/۹	۱۲/۶	۱۲/۶
(۰،۰/۲)	۱۶/۵	۱۶/۲	۱۵/۵	۱۵/۳



شکل ۶: جابجایی عمودی به ازای ثابت ناهمگنی $\alpha = -0.5$

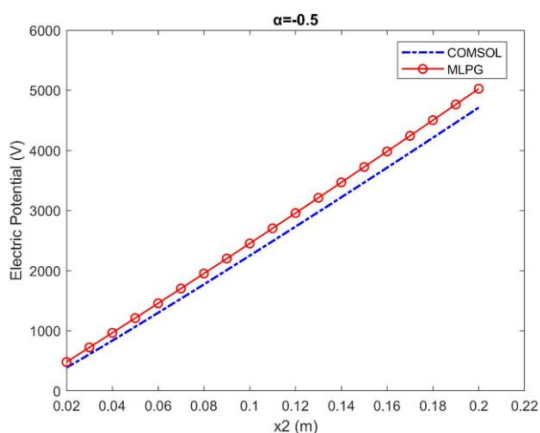


شکل ۵: جابجایی عمودی به ازای ثابت ناهمگنی $\alpha = 0.5$

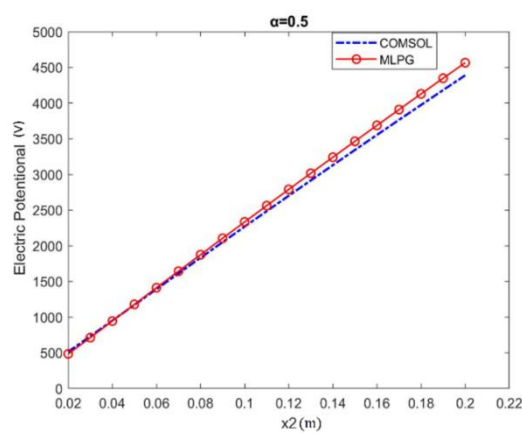
جدول (۷) پتانسیل‌های الکتریکی بر حسب مختصات گره ای و شکل‌های (۷) و (۸) نمودار تغییرات پتانسیل‌های الکتریکی در امتداد خط OC به ازای ثوابت ناهمگنی $\alpha = 0.5, -0.5$ را از دو روش MLPG و نرم افزار اجزاء محدود کامسول نشان می‌دهد. جداول و اشکال نشان می‌دهند که مقادیر ثابت ناهمگنی مثبت باعث کاهش میزان پتانسیل الکتریکی و مقادیر ثابت ناهمگنی منفی باعث افزایش میزان پتانسیل الکتریکی در راستای مذکور می‌گردند.

جدول ۷: مقادیر پتانسیل الکتریکی بر حسب مختصات گره ای به ازای ثابت ناهمگنی متفاوت

$\alpha = -0.5$		$\alpha = 0.5$		مختصات گره (m)
نرم افزار کامسول $\times 10^3$ (v)	روش MLPG $\times 10^3$ (v)	نرم افزار کامسول $\times 10^3$ (v)	روش MLPG $\times 10^3$ (v)	
۰/۸۵۷	۰/۹۹۵	۰/۹۷۱	۰/۹۶۰	(۰،۰/۰۴)
۱/۷۷۵	۱/۹۹۶	۱/۸۳۴	۱/۸۸۱	(۰،۰/۰۸)
۲/۷۴۷	۲/۹۴۷	۲/۷۱۴	۲/۷۸۱	(۰،۰/۱۲)
۳/۷۳۹	۳/۹۵۰	۳/۵۷۶	۳/۶۶۳	(۰،۰/۱۶)
۴/۷۱۳	۴/۹۹۰	۴/۳۸۸	۴/۵۳۳	(۰،۰/۲)



شکل ۸: تغییرات پتانسیل الکتریکی به ازای ثابت ناهمگنی $\alpha = -0.5$



شکل ۷: تغییرات پتانسیل الکتریکی به ازای ثابت ناهمگنی $\alpha = 0.5$



در این مقاله، ضرایب شدت تنش در ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی ترک دار تحت مود اول شکست از رابطه (۵۵) با استفاده از میدان جابجایی و پتانسیل نزدیک نوک ترک و قرار دادن خواص جنس ماده FGPM به ازای ثوابت ناهمگنی جنس مختلف محاسبه شده اند، که نتایج آن در جدول شماره (۷) آورده شده است. همانگونه که از جدول (۸) قابل مشاهده است ضرایب ناهمگنی مثبت باعث افزایش ضریب شدت تنش و ضرایب ناهمگنی منفی باعث کاهش ضریب شدت تنش مود اول شکست می گردد. تأثیر ضرایب ناهمگنی مثبت بر ضریب شدت مود اول، توسط یان و ژیانگ در مرجع [۱۴] برای یک صفحه پیزوالکتریک مدرج تابعی بی نهایت دارای ترک مرکزی با تغییرات خواص جنس ماده پیزوالکتریک تحت بارگذاری کششی از روش تبدیل فوریه مورد بررسی قرار گرفته بود. نتایج این مقاله افزایش مقدار ثابت ناهمگنی جنس را که سبب افزایش ضریب شدت تنش نرمالایز شده k_I ($k_I = K_I/K_I^0$) را نشان می دهد، که K_I^0 ضریب شدت تنش متناظر با $\alpha = 0$ است.

جدول ۸: مقادیر ضریب شدت تنش به ازای ثوابت ناهمگنی متفاوت ماده FGPM

α	مقادیر نوک ترک	ضریب شدت تنش $(MPa\sqrt{m}) (K_I)$	نسبت k_I
۱	$u_2 = 4/29 \times 10^{-4} \text{ m}$ $\Psi = -117 \text{ V}$	۰/۲۹۳۵	۱/۷
۰/۵	$u_2 = 1/75 \times 10^{-4} \text{ m}$ $\Psi = 17 \text{ V}$	۰/۱۸۳۶۵	۱/۰۵
۰	$u_2 = 1/6910 \times 10^{-4} \text{ m}$ $\Psi = -12 \text{ V}$	۰/۱۷۵۸۰	۱
-۰/۵	$u_2 = 1/27 \times 10^{-4} \text{ m}$ $\Psi = 17 \text{ V}$	۰/۱۳۳۵۵	۰/۷۶
-۱	$u_2 = 1/15 \times 10^{-4} \text{ m}$ $\Psi = 116 \text{ V}$	۰/۱۲۶۶۶	۰/۷۲

نتیجه گیری

در این مقاله، از روش MLPG برای تحلیل ترک در ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی استفاده شده است. برای اعمال تکینگی تنش در نوک ترک از روش غنی سازی توابع چند جمله ای پایه برای محدوده اطراف نوک ترک و روش مشاهده پذیری برای اعمال ناپیوستگی میدان جابجایی و پتانسیل الکتریکی استفاده شد. ضریب شدت تنش به دست آمده از این روش برای ورق پیزوالکتریک مدرج تابعی با حل دقیق انطباق خوبی را نشان می دهد. در نهایت مشاهده گردید که ضرایب ثابت ناهمگنی جنس مثبت باعث کاهش مقدار جابجایی و اختلاف پتانسیل ایجاد شده در نیمه بالایی ورق و ضرایب ثابت ناهمگنی جنس منفی باعث کاهش مقدار جابجایی و اختلاف پتانسیل در این قسمت از ورق می گردد. همچنین افزایش ضریب ثابت ناهمگنی جنس ماده FGPM باعث افزایش ضریب شدت تنش مود اول و کاهش آن باعث کاهش ضریب شدت تنش مود اول شکست می شود.



تشکر و قدردانی

مراحل این تحقیق با همکاری مرکز محاسبات پیشرفته دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز انجام گردید. نویسندگان از همکاری آن مرکز تشکر و سپاسگزاری می نمایند.

مراجع

- [1] Park, S., Sun, C., (1993), Effect of electric field on fracture of piezoelectric ceramics. *International Journal of Fracture*, **70**(3), pp 203-216.
- [2] Shindo, Y., Narita, F., Tanaka, K., (1996), Electroelastic intensification near anti-plane shear crack in orthotropic piezoelectric ceramic strip, in *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, pp 65-71.
- [3] Zhong, Z., Shang, E., (2005), Exact analysis of simply supported functionally graded piezothermoelastic plates. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **16**(7-8), pp 643-651.
- [4] Enderlein, M., Ricoeur, A., Kuna, M., (2005), Finite element techniques for dynamic crack analysis in piezoelectrics. *International Journal of Fracture*, **134**(3-4), pp 191-208.
- [5] Kuna, M., (2006), Finite element analyses of cracks in piezoelectric structures: a survey. *Archive of Applied Mechanics*, **76**(11), pp 725-745.
- [6] Rao, B., Kuna, M., (2008), Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded magneto-electroelastic materials. *International journal of fracture*, **153**(1), pp 15-37.
- [7] Liu, G. R., Dai, K. Y., Lim, K. M., Gu, Y. T., (2002), A point interpolation mesh free method for static and frequency analysis of two-dimensional piezoelectric structures. *Computational Mechanics*, **29**(6), pp 510-519.
- [8] Sladek, J., Sladek, V., Pan, E., Young, D. L., (2014), Dynamic anti-plane crack analysis in functional graded piezoelectric semiconductor crystals. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **99**(4), pp 273-296.
- [9] Li, X.L., Zhou, L.M., (2017), An element-free Galerkin method for electromechanical coupled analysis in piezoelectric materials with cracks. *Advances in Mechanical Engineering*, **9**(2), pp 1687814017693733.
- [10] Sladek, J., Sladek, V., Zhang, C., Sulek, P., Pan, E., (2007). Evaluation of fracture parameters in continuously nonhomogeneous piezoelectric solids. *International Journal of Fracture*, **145**(4), pp 313-326.
- [11] Atluri, S.N., (2004), *The meshless method (MLPG) for domain & BIE discretizations*, Tech Science Press.
- [12] Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B., Belytschko, T., (1997), Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International journal for numerical methods in engineering*, **40**(8), pp 1483-1504.
- [13] Anderson, T.L., (2017), *Fracture mechanics: fundamentals and applications*, CRC press.
- [14] Yan, Z., Jiang, L., (2009), Study of a propagating finite crack in functionally graded piezoelectric materials considering dielectric medium effect. *International Journal of Solids and Structures*, **46**(6), pp 1362-1372.